

Schwingungs- und Wellenlehre anwenden

Alle periodischen Vorgänge in der Technik basieren auf Schwingungen. Diese haben im Arbeitsumfeld von Technikerinnen und Technikern eine wichtige Bedeutung z.B. im Hinblick auf Materialermüdung oder Arbeitsplatzgestaltung.

Schwingungstechnische Größen sind häufig Bestandteil von technischen Dokumentationen oder Datenblättern. Von Technikerinnen und Technikern wird erwartet, dass diese Unterlagen verstanden und Schlüsse daraus gezogen werden.

Aus diesen Gründen werden im Lernbereich 1 die Grundbegriffe der harmonischen Schwingung sowie Resonanz und Dämpfung vermittelt.

Im Lernbereich 2 wird die Physik der Wellen vorgestellt, um sie im Lernbereich 3 auf den wichtigen Bereich der Akustik anzuwenden.

Voraussetzung für dieses Lernmodul ist eine erfolgreiche Bearbeitung des Lernmoduls 1 dieses Faches

- Grundlagen der Mechanik anwenden

Alle weiteren notwendigen Informationen und Arbeitsunterlagen sind in diesem Lernmodul enthalten.

Dieses Lernmodul ist im häuslichen Studium zu erarbeiten.

Der benötigte Zeitaufwand liegt bei ca. 14 Stunden.

Zusätzlich finden in den semesterbezogenen Präsenzphasen 4 Stunden Festigung und Vertiefung fachspezifischer und fächerübergreifender Zusammenhänge statt.

LERNMODUL 3

Ziele

Ausgangssituation

Planung

Inhaltsverzeichnis

| | |
|------------------------------------|-----------|
| 1 Schwingungen | 3 |
| 1.1 Harmonische Schwingungen | 3 |
| 1.2 Dämpfung und Resonanz | 35 |
| 2 Wellen | 44 |
| 3 Schall | 68 |
| Lösungsanhang | 89 |

1 Schwingungen

Lernbereich

1.1 Harmonische Schwingungen

Bei vielen Vorgängen in Natur und Technik handelt es sich um periodische Bewegungsabläufe. Die Prozesse wiederholen sich ständig und durchlaufen in definierten zeitlichen und räumlichen Abständen die gleichen Bewegungszustände. Bei vielen dieser Erscheinungen handelt es sich um Schwingungen oder Wellenerscheinungen.

In Abbildung 1 sind einige Beispiele für Schwingungen dargestellt.

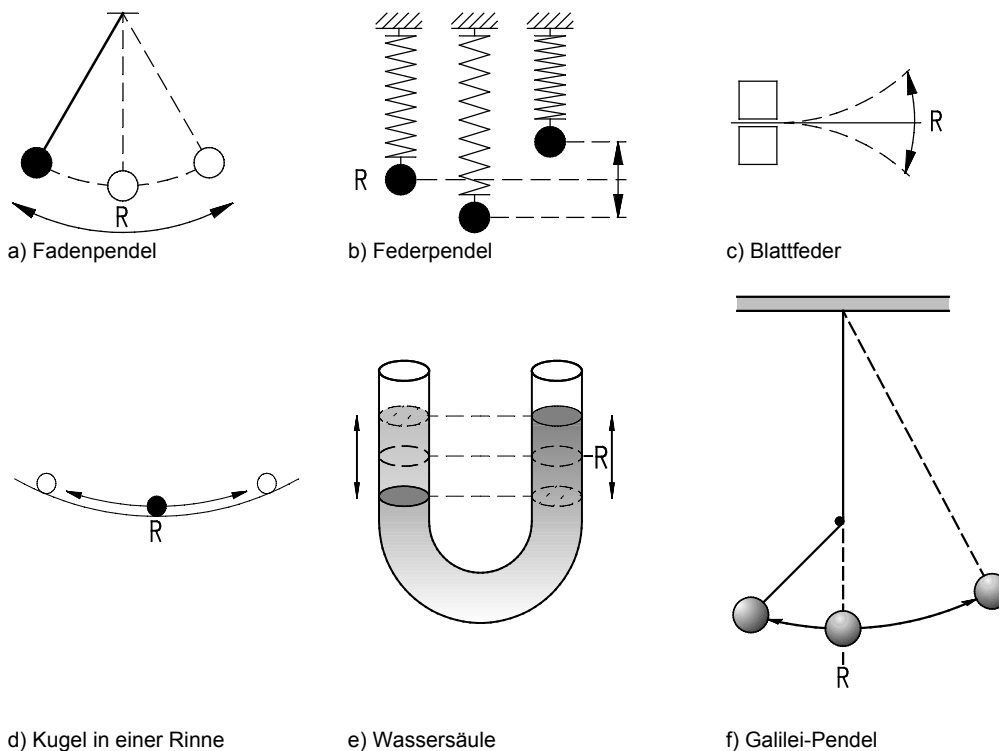


Abbildung 1 Beispiele für Schwingungen

Neben den aufgeführten mechanischen schwingungsfähigen Systemen (Oszillatoren) gibt es auch in der Optik, der Elektrizitätslehre sowie in der Atom- und Kernphysik Schwingungsvorgänge und Wellenerscheinungen. Sie sind grundlegende Strukturen in allen Teilen der Physik, lassen sich jedoch am anschaulichsten an mechanischen Vorgängen beschreiben.

Von allen periodischen Bewegungsvorgängen sind die harmonischen Schwingungen die wichtigsten, da sich alle anderen Schwingungsformen aus ihnen zusammensetzen lassen.

Damit eine periodische Bewegung in der Physik allgemein als Schwingung gilt, muss sie zwei Bedingungen erfüllen:

1. Die Bewegungszustände des Oszillators wiederholen sich periodisch in gleichen Zeitabständen gleich oder ähnlich.
2. Die Bewegung verläuft zwischen zwei Umkehrpunkten durch einen ausgezeichneten Punkt, die stabile Ruhelage.

Die obigen Bedingungen unterscheiden eine Schwingung z.B. eindeutig von einer Kreisbewegung. Bei der Kreisbewegung wiederholen sich zwar die Bewegungszustände periodisch, es fehlt jedoch eine stabile Ruhelage.

Für die mathematische Beschreibung der Schwingungen sind folgende Größen zu definieren:

Schwingungsdauer oder Periodendauer T

Die Schwingungs- oder Periodendauer T ist die zeitliche Dauer einer vollständigen Schwingung.

Werden z vollständige Schwingungen in der Zeit t durchgeführt, so berechnet sich die Periodendauer nach:

$$T = t/z$$

Schwingungszahl oder Frequenz f

Die Schwingungszahl oder Frequenz ist der Quotient aus der Anzahl der vollständigen Schwingungen und der dafür benötigten Zeit.

Wird für z vollständige Schwingungen die Zeit t benötigt, so berechnet sich die Frequenz zu:

$$f = z/t$$

Die Einheit der Frequenz ist Hertz: $[f] = 1 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ Hz}$.

Zwischen Frequenz f und der Schwingungsdauer T bestehen die Beziehungen

$$f = 1/T \text{ bzw. } T = 1/f.$$

Momentane Auslenkung oder Elongation $y(t)$

Die momentane Auslenkung oder Elongation $y(t)$ gibt den Weg an, um den sich der schwingende Körper zum Zeitpunkt t aus der Ruhelage entfernt hat.

Auslenkungen nach unterschiedlichen Seiten der Ruhelage werden durch das Vorzeichen unterschieden. In der Ruhelage ist die Elongation null.

Schwingungsweite oder Amplitude \hat{y}

Die Schwingungsweite oder Amplitude \hat{y} ist der Betrag der maximalen Elongation.

Bei den meisten Schwingungen nimmt die Amplitude mehr oder weniger schnell ab. Ursache dafür ist ein Energieverlust auf Grund von Reibungskräften im schwingenden System. Nach dem zeitlichen Verlauf der Amplitude werden zwei Schwingungsformen unterschieden:

Schwingungen mit konstanter Amplitude werden als **ungedämpft**, Schwingungen mit abnehmender Amplitude als **gedämpft** bezeichnet.

Rücktreibende Kraft

Bei der periodischen Hin- und Herbewegung aller Schwingungen findet in den Umkehrpunkten eine Umkehr der Bewegungsrichtung statt. Ursache dafür ist eine Kraft, die bei Zunahme der Elongation der Bewegung entgegen wirkt und bei Abnahme der Elongation die Bewegung unterstützt. Die Kraft bewirkt somit bei der Zunahme der Elongation eine Verringerung der Geschwindigkeit, bei Abnahme der Elongation eine Erhöhung der Geschwindigkeit. Diese immer in Richtung der Ruhelage wirkende Kraft bezeichnet man mit **rücktreibende Kraft**.

Bei den in Abbildung 1 aufgeführten mechanischen Schwingungen wird beim Fadenpendel, beim Galilei-Pendel, der schwingenden Kugel und bei der Wassersäule die rücktreibende Kraft durch die Schwerkraft erzeugt. Bei der Blattfeder bewirkt die elastische Federkraft, beim Federpendel das Zusammenwirken von Schwerkraft und elastischer Federkraft die rücktreibende Kraft.

Harmonische Schwingungen

Gesetze der harmonischen Schwingung

Für die Herleitung der mathematischen Gesetzmäßigkeiten für mechanische Schwingungen wird von einer idealisierten ungedämpften Schwingung ausgegangen. Die Amplitude bleibt während der Beobachtungsdauer konstant.

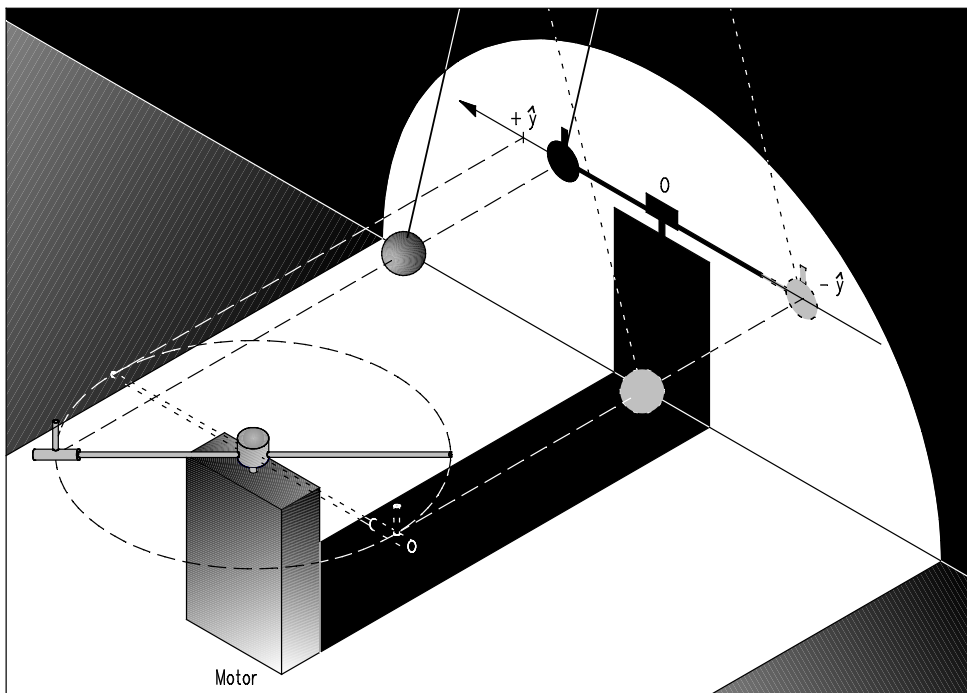


Abbildung 2 Gleichzeitige Projektion einer Kreisbewegung und einer Pendelschwingung

Bei dem in Abbildung 2 dargestellten Versuchsaufbau vollführt ein mit einer Stange an der Achse eines Motors befestigter Stift eine gleichmäßige Kreisbewegung. Bei der senkrechten Projektion des Stiftes auf einen ebenen Schirm ergibt sich eine Hin- und Herbewegung des Schattens. Ein langes Fadenpendel wird so ausgerichtet, dass der Pendelkörper parallel zum Schirm schwingt und sein Schatten mit dem des Stiftes zur Deckung kommt. Die Motordrehzahl wird so eingestellt, dass die Schatten von Stift und Pendelkörper in Deckung bleiben.

Dieser Versuch zeigt, dass die Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung und die Bewegung eines Fadenpendels synchron verlaufen. Dieses Verhalten wird für die Definition einer harmonischen Schwingung verwandt:

Eine lineare Schwingung heißt harmonische Schwingung, wenn ihr Bewegungsverlauf mit der Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung übereinstimmt.

Auf Grund dieser Übereinstimmung können die mathematischen Beschreibungen für eine Kreisbewegung auch bei den harmonischen Schwingungen angewandt werden.

Zeigerdarstellung der harmonischen Schwingung

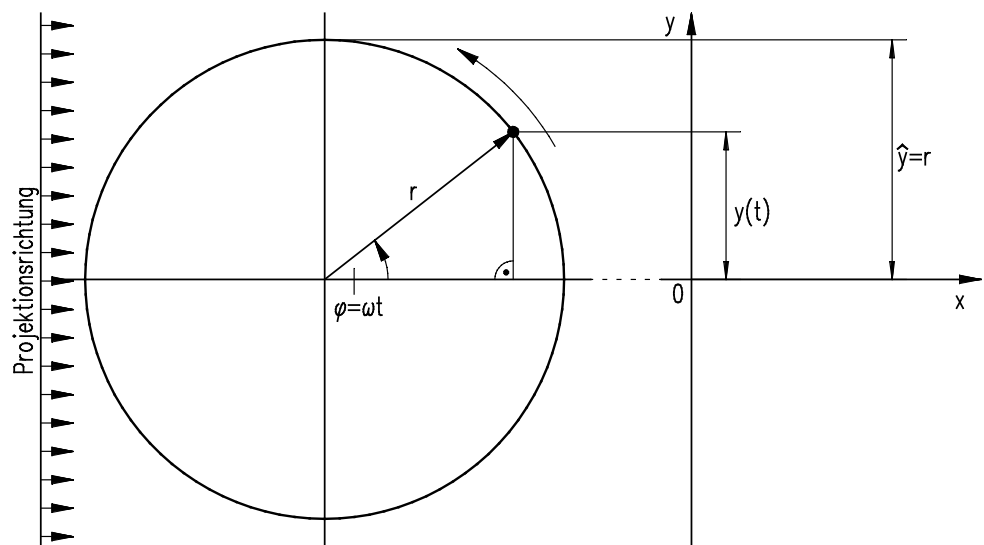


Abbildung 3 Zeigerdarstellung einer harmonischen Schwingung

Für die Berechnungen wird die harmonische Schwingung durch einen Radiusvektor bzw. Zeiger mit dem Radius r dargestellt, der im mathematisch positiven Sinn mit konstanter Geschwindigkeit umläuft (Abbildung 3). Dabei entspricht die Länge des **Zeigers** r der **Amplitude** \hat{y} der Schwingung.

Der Winkel φ zwischen dem Zeiger und der positiven x -Achse zu einem bestimmten Zeitpunkt ist der **Phasenwinkel** oder die **Phase der Schwingung** und kennzeichnet den momentanen Schwingungszustand.

Mit der Kreisfrequenz ω der Schwingung gilt für die Phase:

$$\varphi = \omega \cdot t$$

Entsprechend der Winkelgeschwindigkeit bei der Kreisbewegung berechnet sich die Kreisfrequenz aus der Schwingungsdauer oder der Frequenz nach:

$$\omega = 2 \cdot \pi / T \text{ bzw. } \omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

In Tabelle 1 sind die Größen von gleichförmiger Kreisbewegung und harmonischer Schwingung gegenübergestellt.

| Symbol | Kreisbewegung | harmonische Schwingung |
|-----------|-----------------------|------------------------|
| r | Bahnradius | Amplitude \hat{y} |
| T | Umlaufdauer | Schwingungsdauer |
| f | Frequenz | Frequenz |
| φ | Drehwinkel | Phasenwinkel, Phase |
| ω | Winkelgeschwindigkeit | Kreisfrequenz |

Tabelle 1 Gegenüberstellung von Kreisbewegung und harmonischer Schwingung

Die Parallelprojektion der momentanen Zeigerstellung r auf die y -Achse ergibt die Elongation $y(t)$ der Schwingung. Da es sich bei der Schwingung um eine lineare Bewegung handelt, reicht für die Beschreibung der Bewegungsrichtung das Vorzeichen der Auslenkung.

Zeit-Weg-Gesetz der harmonischen Schwingung

Trägt man die Parallelprojektionen $y(t)$ des Zeigers r in Abhängigkeit von der Zeit t in ein Zeit-Weg-Diagramm auf, erhält man den in Abbildung 4 dargestellten Verlauf. Zur besseren Übersicht sind für einige Phasenwinkel φ die Bewegungsphasen durch Nummern gekennzeichnet.

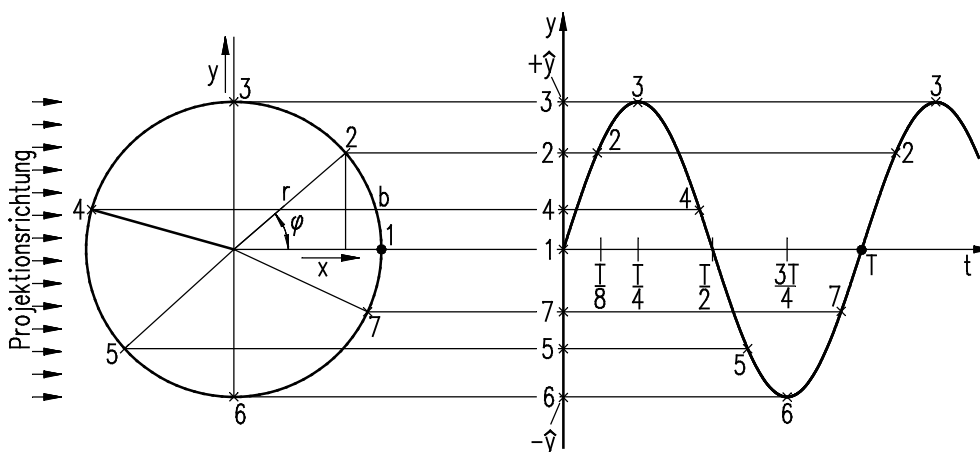


Abbildung 4 Zeit-Weg-Diagramm der harmonischen Schwingung

Aus der Abbildung ergibt sich für die Elongation y der Zusammenhang

$$y = r \cdot \sin \varphi.$$

Mit den Gleichungen $r = \hat{y}$ und $\varphi = \omega \cdot t$ erhält man das

Zeit-Weg-Gesetz:

$$y = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Die Elongation der harmonischen Schwingung hat somit einen sinusförmigen Verlauf und die Umkehrpunkte ($y = \hat{y}$ und $y = -\hat{y}$ bei $t = T/4$ und $t = 3 \cdot T/4$) liegen symmetrisch zur Ruhelage ($y = 0$). Somit kann eine harmonische Schwingung auch folgendermaßen definiert werden:

Lässt sich das Zeit-Weg-Diagramm einer Schwingung durch eine Sinuskurve darstellen, dann heißt die Schwingung harmonisch.

Die in Abbildung 1 dargestellten Oszillatoren erzeugen (für kleine Elongationen), bis auf das Galilei-Pendel (Abbildung 1f), harmonische Schwingungen.

Zeit-Geschwindigkeits-Gesetz der harmonischen Schwingung

Für die weitere Beschreibung der harmonischen Schwingung sind in Abbildung 5 die vektoriellen Größen des Zeigers \vec{r} , der Bahngeschwindigkeit \vec{v}_t und der Radialbeschleunigung \vec{a}_r , sowie deren Projektionen auf die y-Achse dargestellt.

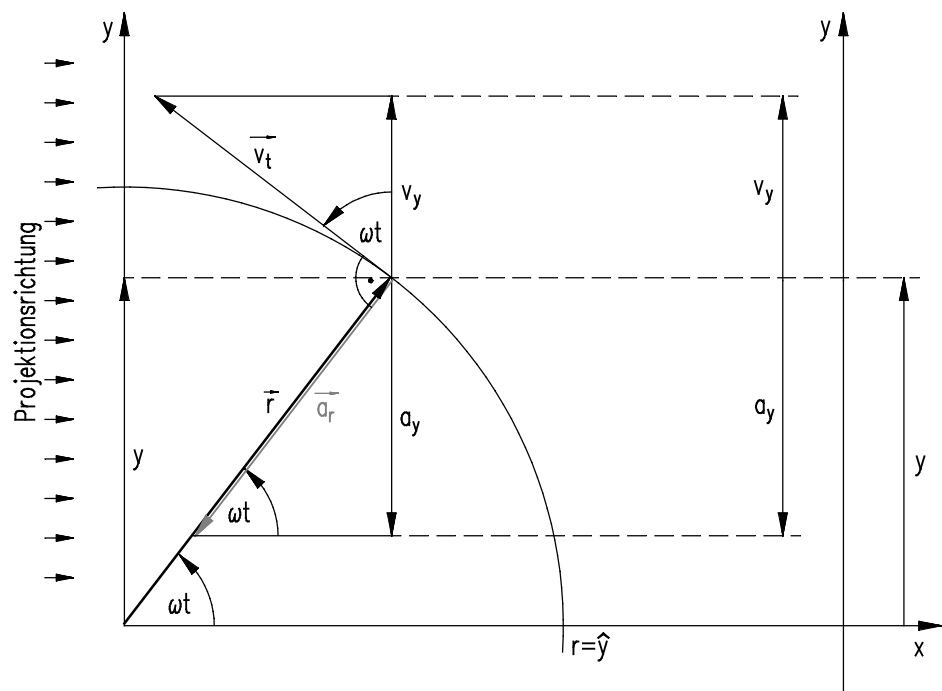


Abbildung 5 Vektorielle Größen und Projektionen von Zeigern, Bahngeschwindigkeit und Radialbeschleunigung

Der Vektor der Bahngeschwindigkeit steht, entsprechend der Kreisbewegung, senkrecht auf dem Radiusvektor bzw. Zeiger der Schwingung (hier nicht weiter hergeleitet). Wie aus Abbildung 5 ersichtlich gilt für die Projektion oder y-Komponente der Geschwindigkeit:

$$v_y = v_t \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad v_t = \omega \cdot \hat{y}$$

Zeit-Geschwindigkeits-Gesetz:

$$v_y = \omega \cdot \hat{y} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

In Abbildung 6 ist der zeitliche Verlauf der y-Komponente der Geschwindigkeit dargestellt.

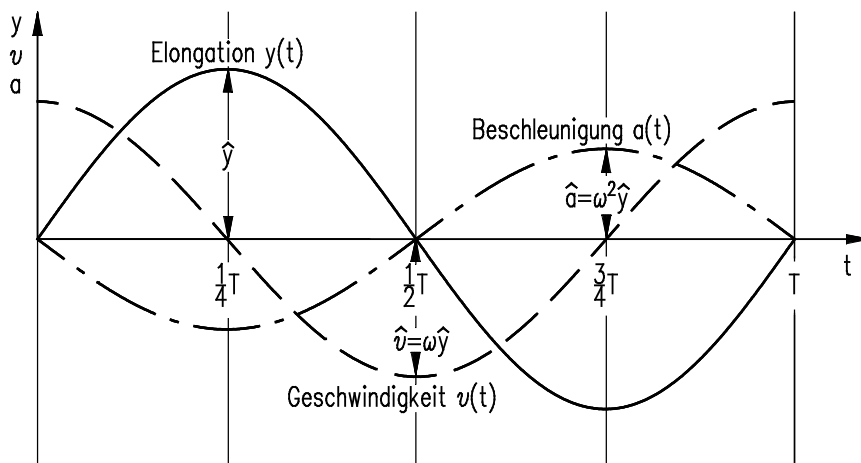


Abbildung 6 Zeitlicher Verlauf von Elongation, Geschwindigkeit und Beschleunigung bei einer harmonischen Schwingung

In den Umkehrpunkten bei $t = T/4$ und $t = 3 \cdot T/4$ ist die Geschwindigkeit gleich Null. Beim Durchgang durch die Ruhelage ($t = 0$, $t = T/2$, $t = T$, etc.) ist der Betrag der Geschwindigkeit maximal und es gilt:

$$\hat{v} = \hat{y} \cdot \omega$$

Die Richtung der vektoriellen Größe Geschwindigkeit wird wieder durch das Vorzeichen ausgedrückt.

Zeit-Beschleunigungs-Gesetz der harmonischen Schwingung

Aus der Abbildung 5 ergibt sich ebenso die y-Komponente der Beschleunigung

$$a_y = -a_r \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

der Schwingung. Mit $a_r = \omega^2 \cdot r$ für eine gleichförmige Kreisbewegung und $r = \hat{y}$ erhält man das

Zeit-Beschleunigungs-Gesetz:

$$a_y = -\omega^2 \cdot \hat{y} \sin(\omega \cdot t)$$

Das negative Vorzeichen in der Gleichung berücksichtigt, dass Beschleunigung und Elongation entgegengesetzt gerichtet sind. In Abbildung 6 ist der zeitliche Verlauf der y-Komponente der Beschleunigung dargestellt.

In den Umkehrpunkten bei $t = T/4$ und $t = 3 \cdot T/4$ ist der Betrag der Beschleunigung maximal und es gilt:

$$\hat{a} = -\hat{y} \cdot \omega^2$$

Kraftgesetz der harmonischen Schwingung

Mit der Beschleunigung lassen sich Aussagen über die bei der Schwingung wirkenden Kräfte machen. Bei der Kreisbewegung hat die benötigte Zentralkraft $F = m \cdot \omega^2 \cdot r$

dieselbe Richtung wie die Beschleunigung, womit für die y-Komponente der Kraft bei einer Schwingung gilt:

$$F_y = -m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Mit $r = \hat{y}$ und $y = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ folgt das

Kraftgesetz:

$$F_y = -m \cdot \omega^2 \cdot y = -Dy, \text{ mit } D = m \cdot \omega^2$$

Aus der Gleichung ist ersichtlich, dass die auf eine Masse (Schwinger) wirkende Kraft stets der Elongation entgegengerichtet ist, und ihr Betrag proportional zum Betrag der Elongation ist.

Daher wird das Kraftgesetz der harmonischen Schwingung auch als **lineares Kraftgesetz** bezeichnet. Die Proportionalitätskonstante D wird als **Richtgröße** oder **Direktionsgröße** bezeichnet.

Das lineare Kraftgesetz bietet eine weitere Möglichkeit zur Identifikation einer harmonischen Schwingung:

Eine Schwingung heißt harmonisch, wenn die auf eine Masse wirkende Kraft stets proportional zur Elongation und dieser entgegengesetzt gerichtet ist.

Sind von einer harmonischen Schwingung das lineare Kraftgesetz und damit D bekannt, lassen sich nach $m \cdot \omega^2 = D$ die Kreisfrequenz der Schwingung nach

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

und mit $\omega = 2 \cdot \pi / T$ die Schwingungsdauer

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$

berechnen.

Lehrbeispiel 1

Ein harmonische Schwingung hat eine Amplitude von 6 cm und die Periodendauer 2,4 s.

1.1 Berechnen Sie die Werte für die Elongation, Geschwindigkeit und Beschleunigung für die Zeiten $t = n \cdot T/8$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ und tragen Sie diese in eine Tabelle ein!

1.2 Zeichnen Sie die Grafen der drei Größen in Abhängigkeit von der Zeit!

Lösung**Gegeben:** $\hat{y} = 6 \text{ cm}$; $T = 2,4 \text{ s}$; $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ **Gesucht:** t ; $y(t)$; $v(t)$, $a(t)$ **Hinweis:** Argumente der trigonometrischen Funktionen in Bogenmaß**Lehrbeispiel 1.1****Berechnungen der Zeit t**

$$t = \frac{n \cdot T}{8}$$

$$t = \frac{2,4 \text{ s}}{8} \cdot n$$

Die Ergebnisse werden in die Tabelle eingetragen (s. Tabelle unten).

Berechnung der Elongation y

$$y = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\Leftrightarrow y = \hat{y} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

Einsetzen der Zeit t

$$\Rightarrow y = \hat{y} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{n \cdot T}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \hat{y} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right)$$

$$y = 6 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right)$$

Die Ergebnisse werden in die Tabelle eingetragen (s. Tabelle unten).

Berechnung der Geschwindigkeit

$$v_y = \omega \cdot \hat{y} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\Leftrightarrow v_y = \frac{2\pi}{T} \cdot \hat{y} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right)$$

$$v_y = \frac{2\pi}{2,4 \text{ s}} \cdot 6 \text{ cm} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right)$$

Die Ergebnisse werden in die Tabelle eingetragen (s. Tabelle unten).

Berechnung der Beschleunigung

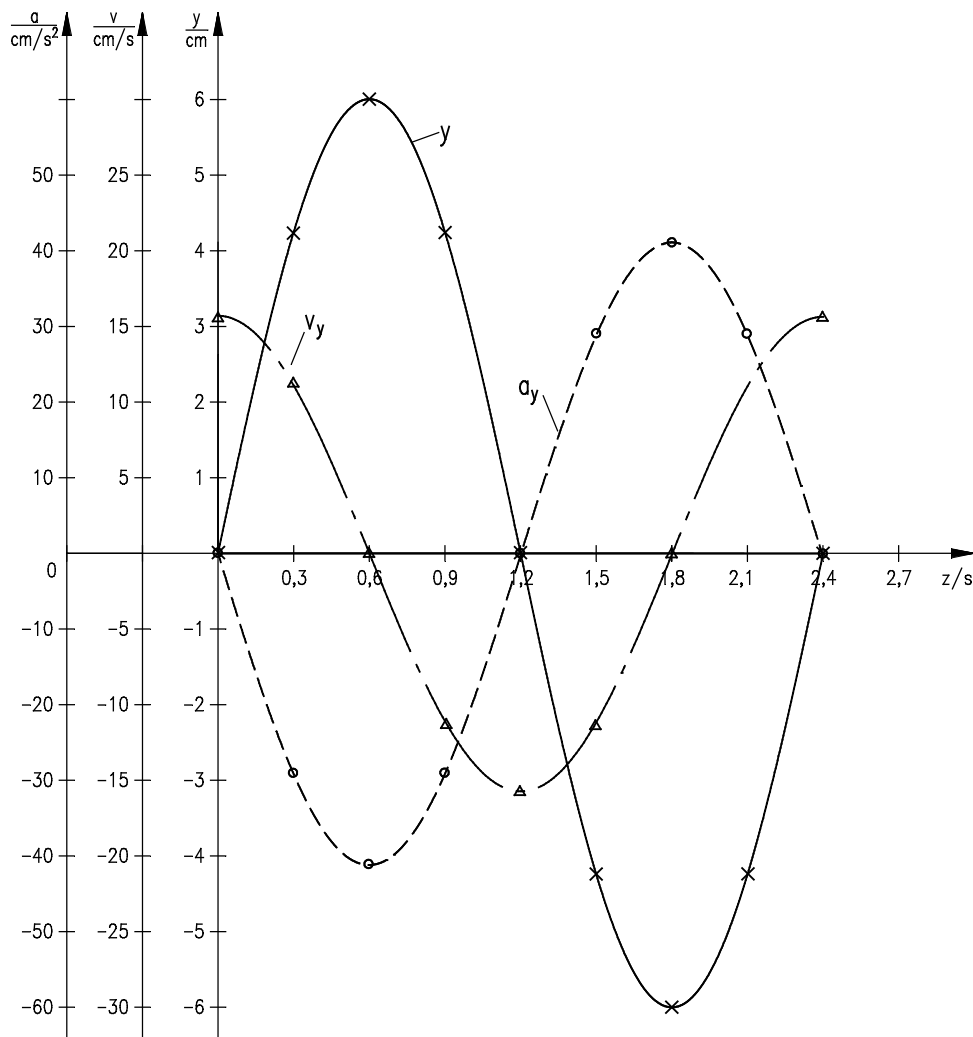
$$a = -\omega^2 \cdot \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \hat{y} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right)$$

$$a = -\frac{4\pi^2}{2,4^2 \cdot s^2} \cdot 6 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right)$$

Die Ergebnisse werden in die Tabelle eingetragen (s. Tabelle unten).

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------------------------------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| t in s | 0 | 0,3 | 0,6 | 0,9 | 1,2 | 1,5 | 1,8 | 2,1 | 2,4 |
| y in cm | 0,00 | 4,24 | 6,00 | 4,24 | 0,00 | -4,24 | -6,00 | -4,24 | 0,00 |
| v _y in cm/s | 15,71 | 11,11 | 0 | -11,11 | -15,71 | -11,11 | 0 | 11,11 | 15,71 |
| a _y in cm/s ² | 0,00 | -29,08 | -41,12 | -29,08 | 0,00 | 29,08 | 41,12 | 29,08 | 0,00 |

Lehrbeispiel 1.2**Lehrbeispiel 2**

Zeichnen Sie das Zeit-Weg-Diagramm eines harmonischen Oszillators mit $D = 1 \text{ N/m}$, $m = 2,5 \text{ kg}$ und $\hat{y} = 4 \text{ cm}$!

Lösung

Gegeben: $\hat{y} = 4 \text{ cm}$; $m = 2,5 \text{ kg}$; $D = 1 \text{ N/m}$

Gesucht: t-y-Diagramm

Berechnung der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \quad 1\text{N} = 1\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{2,5 \text{ kg}}{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}}}$$

$$T = 9,93 \text{ s}$$

Für die Punkte der grafischen Darstellung werden Zeitwerte entsprechend Lehrbeispiel 1 gewählt und in einer Tabelle zusammengestellt.

Berechnung der Amplitude

$$y = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

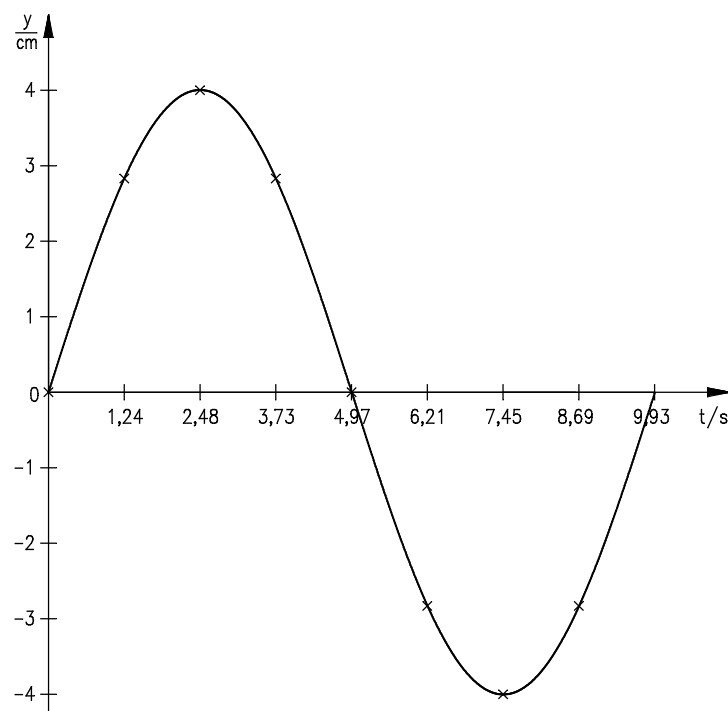
$$y = \hat{y} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right)$$

$$y = 4 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right)$$

Die Ergebnisse für die verschiedenen Zeiten werden in die Wertetabelle eingetragen.

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|------|
| t in s | 0 | 1,24 | 2,48 | 3,73 | 4,97 | 6,21 | 7,45 | 8,69 | 9,93 |
| y in cm | 0,00 | 2,83 | 4,00 | 2,83 | 0,00 | -2,83 | -4,00 | -2,83 | 0,00 |

Die berechneten Werte werden in ein Weg-Zeit-Diagramm eingetragen und die Kurve gezeichnet.



Energie der harmonischen Schwingung

Bei jedem Oszillator gibt es eine stabile Ruhelage. In ihr ist der Schwinger auf Grund der rücktreibenden Kraft $F_r = -Dy$ in der stabilen Gleichgewichtslage. Zur Anregung einer Schwingung muss der Schwinger gegen die rücktreibende Kraft ausgelenkt werden. Die dabei aufgebrachte Arbeit bleibt im System als potenzielle Energie erhalten.

Die **potenzielle Energie** des harmonischen Oszillators berechnet sich für jeden Zeitpunkt t aus der Arbeit, die für die Verschiebung der Masse m bis zur momentanen Elongation aufgebracht werden muss, und es gilt:

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D \cdot y^2$$

Mit dem Zeit-Weg-Gesetz $y = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ ergibt sich für die potenzielle Energie des harmonischen Oszillators:

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot y^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \hat{y}^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t)$$

In der Ruhelage ist die potenzielle Energie gleich Null. In den beiden Umkehrpunkten ist die potenzielle Energie maximal und berechnet sich für $t = T/4$ nach

$$E_{\text{pot max}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \hat{y}^2.$$

Wird der aus seiner Ruhelage ausgelenkte Schwinger losgelassen, so wird er auf Grund der rücktreibenden Kraft beschleunigt und erhält bei der Geschwindigkeit v kinetische Energie.

Die **kinetische Energie** für jeden Zeitpunkt t berechnet sich aus der Geschwindigkeit $v = \omega \cdot \hat{y} \cdot \cos(\omega \cdot t)$ und mit $m \cdot \omega^2 = D$ zu

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot \hat{y}^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \hat{y}^2 \cos^2(\omega \cdot t)$$

Mit dem mathematischen Zusammenhang $\cos^2(\omega \cdot t) = 1 - \sin^2(\omega \cdot t)$ und dem Zeit-Weg-Gesetz $y = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ ergibt sich für die kinetische Energie:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \hat{y}^2 \cdot (1 - \sin^2(\omega \cdot t)) = \frac{1}{2} D \cdot \hat{y}^2 - \frac{1}{2} \cdot D \cdot \hat{y}^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t)$$

Die kinetische Energie ist in den Umkehrpunkten gleich Null und erreicht beim Durchgang durch die stabile Ruhelage ihren Maximalwert von

$$E_{\text{kin max}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \hat{y}^2 \quad \text{oder mit } D = m \cdot \omega^2 \quad E_{\text{kin max}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot \hat{y}^2$$

Die **Gesamtenergie** des harmonischen Oszillators ist die Summe aus kinetischer und potenzieller Energie. Die Gesamtenergie ist bei einer ungedämpften Schwingung konstant.

Bei einem harmonischen Oszillator wandelt sich während des Schwingungsverlaufes periodisch potenzielle Energie in kinetische um und umgekehrt. Die Gesamtenergie kann als maximale potenzielle oder kinetische Energie angegeben werden und ist proportional zum Quadrat der Amplitude und Frequenz:

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \hat{y}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot \hat{y}^2$$

Die Gleichheit von Gesamtenergie mit der maximalen potenziellen oder kinetischen Energie ist einsichtig, da in den Umkehrpunkten die Gesamtenergie nur aus der potenziellen Energie besteht, und beim Durchgang durch die stabile Ruhelage die Gesamtenergie als kinetische Energie vorliegt.

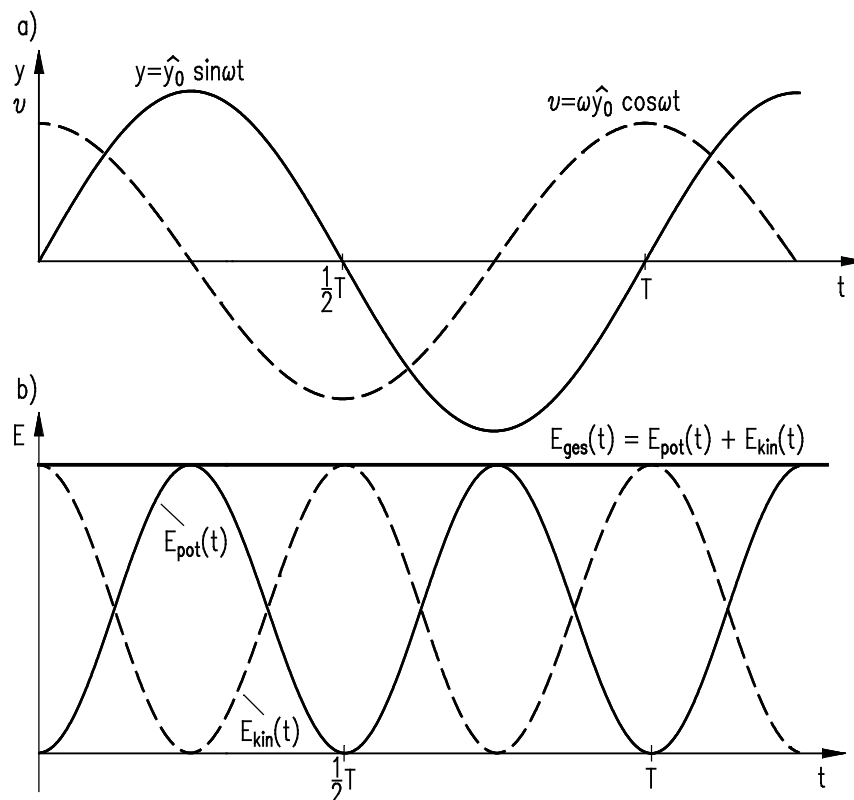


Abbildung 7 Zeitlicher Verlauf der Elongation, der Geschwindigkeit und der energetischen Verhältnisse beim harmonischen Oszillator

Trägt man potenzielle und kinetische Energie als Funktion der Elongation auf, erhält man mit $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \hat{y}^2$ und $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (\hat{y}^2 - y^2)$ den in Abbildung 8 dargestellten Verlauf. Wie zu erwarten ist die Gesamtenergie konstant und unabhängig von der Elongation.

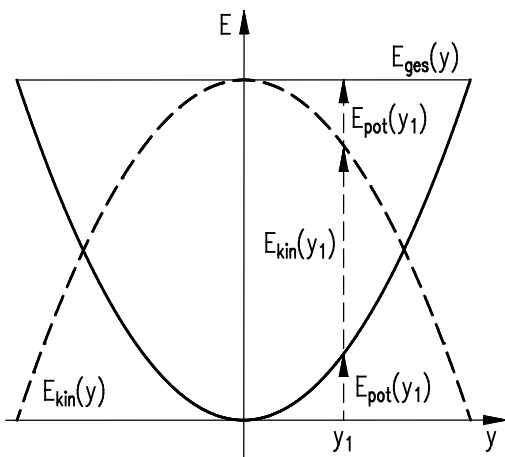


Abbildung 8 Energieverhältnisse in Abhängigkeit der Elongation beim harmonischen Oszillator

Der Kurvenverlauf der potenziellen Energie in Abbildung 8 wird als **Potenzialmulde** bezeichnet. Ursache für solche Potenzialmulden sind all die Kräfte, die Körper an einer bestimmten Lage binden, z.B. rücktreibende Kräfte bei Oszillatoren, elektrostatische Kräfte, Nuklearkräfte, etc.

Lehrbeispiel 3

Berechnen Sie die kinetische, potenzielle und die gesamte Energie eines harmonischen Schwingers mit $\hat{y} = 10 \text{ cm}$; $T = 4 \text{ s}$, $m = 1 \text{ kg}$!

Lösung

Gegeben: $\hat{y} = 0,1 \text{ m}$; $T = 4 \text{ s}$, $m = 1 \text{ kg}$

Gesucht: E_{kin} ; E_{pot} ; E_{ges}

Es gilt: $E_{\text{kinmax}} = E_{\text{potmax}} = E_{\text{ges}}$

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot \hat{y}^2$$

$$\Leftrightarrow E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \hat{y}^2$$

$$\Rightarrow E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ kg} \cdot \frac{4\pi^2}{4^2 \text{ s}^2} \cdot 0,1^2 \text{ m}^2 \quad (\text{mit } 1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2)$$

$$E_{\text{ges}} = \underline{\underline{12,3 \cdot 10^{-3} \text{ Nm} = 12,3 \text{ mWs}}}$$

Der Oszillator hat eine Gesamtenergie von 12,3 mWs.

Beispiele harmonischer Schwingungen

Fadenpendel oder Schwerependel

Eines der anschaulichsten Oszillatoren ist das Fadenpendel. An einem Faden der Länge l hängt ein Schwinger mit der Masse m (Abbildung 9).

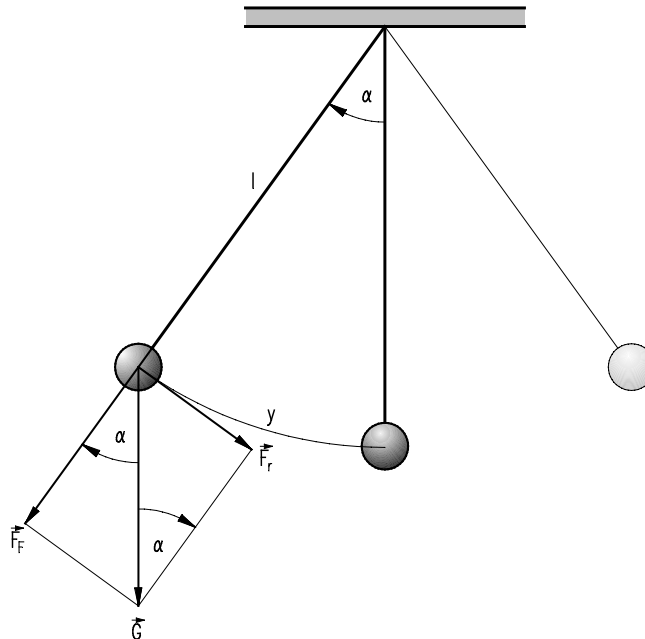


Abbildung 9 Faden- oder Schwerependel

Wird die Masse aus der Ruhelage ausgelenkt, erfährt sie eine rückstellende Kraft F_r . Erzeugt wird die rückstellende Kraft durch die Gewichtskraft G der Masse. Sie ist der Elongation y entgegen gerichtet und steht tangential auf dem Kreisbogen der Auslenkung und senkrecht auf der Zentrifugalkraft F_z , die von Faden kompensiert wird. Bei einem Winkel α für die Auslenkung berechnet sie sich zu:

$$F_r = -G \cdot \sin \alpha$$

Die Elongation berechnet sich aus der Länge des Fadens und dem Auslenkungswinkel α (in Bogenmaß) nach $y = l \cdot \alpha$.

Setzt man beide Gleichungen ins Verhältnis, ergibt sich:

$$\frac{F_r}{y} = -\frac{G}{l} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

Für Winkel $\alpha < 10^\circ$ ist der Unterschied zwischen $\sin \alpha$ und α kleiner als 0,5 %. Somit kann der Kreisbogen y bei kleinen Auslenkungen angenähert als linear betrachtet werden und es gilt in guter Näherung $(\sin \alpha) / \alpha = 1$. Daraus ergibt sich für die rücktreibende Kraft:

$$F_r = -\frac{G}{l} \cdot y = -\frac{m \cdot g}{l} \cdot y$$

Die rücktreibende Kraft F_r ist somit für kleine Auslenkungen der Elongation y proportional und ihr entgegen gerichtet (lineares Kraftgesetz), es gilt:

$$F_r = -\frac{mg}{l} y = -D \cdot y$$

Der Proportionalitätsfaktor ist die Richtgröße D , sie berechnet sich nach

$$D = m \cdot g/l.$$

Die Dauer der harmonischen Schwingung berechnet sich mit der Richtgröße nach

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \quad \text{zu} \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Die Schwingungsdauer T eines Schwebpendels ist somit unabhängig von der Masse des Schwingers und nur von der Fadenlänge l und der Erdbeschleunigung g abhängig.

Da die Größen l und T experimentell sehr genau zu messen sind, eignet sich das Fadenpendel gut zur Bestimmung der Erdbeschleunigung g . Schon 1826 konnte Bessel mit einem Schwebpendel die Abhängigkeit der Erdbeschleunigung von der geographischen Breite nachweisen. Sie nimmt an der Erdoberfläche vom Äquator zu den Polen hin kontinuierlich zu.

Lehrbeispiel 4

Ein Fadenpendel hat eine Länge von $l = 3,64 \text{ m}$ und führt in 180 Sekunden 47 Schwingungen aus.

Berechnen Sie die Erdbeschleunigung!

Lösung

Gegeben: $l = 3,64 \text{ m}$; $t = 180 \text{ s}$; $z = 47$

Gesucht: g

$$T = \frac{180}{47} \text{ s}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Rightarrow \quad T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{l}{g}$$

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot l}{T^2}$$

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot 3,64 \text{ m}}{\left(\frac{180}{47} \text{ s}\right)^2}$$

$$g = 9,797 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die Berechnung liefert den Wert von $9,797 \text{ m/s}^2$, der mittlere Wert auf der Erdoberfläche liegt bei **9,81 m/s²**.

Lehrbeispiel 5

Berechnen Sie die Länge eines Fadenpendels für eine Schwingungsdauer von 1 Sekunde!

Lösung

Gegeben: $T = 1 \text{ s}$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Gesucht: l

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Rightarrow \quad T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{l}{g}$$

$$l = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2}$$

$$l = \frac{(1 \text{ s})^2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4\pi^2}$$

$$l = 0,248 \text{ m}$$

Das Fadenpendel muss eine Länge von 24,8 cm haben.

Die Herleitung der Schwingungsdauer T beim Fadenpendel gilt nur für kleine Auslenkungen. Außerdem muss die Masse des Fadens gegenüber der Masse des Pendelkörpers zu vernachlässigen sein und der Körper als punktförmig angenommen werden können. Solche idealisierten Pendel werden auch als **mathematische Pendel** bezeichnet.

Bei großen Auslenkungen ist die Näherung $(\sin \alpha) / \alpha = 1$ nicht mehr gültig und es kommt zu Abweichungen in der Schwingungsdauer. In Abbildung 10 ist der zeitliche Verlauf zweier ungedämpfter Pendelbewegungen des gleichen Systems für Auslenkungen α_0 von 10° und 60° dargestellt.

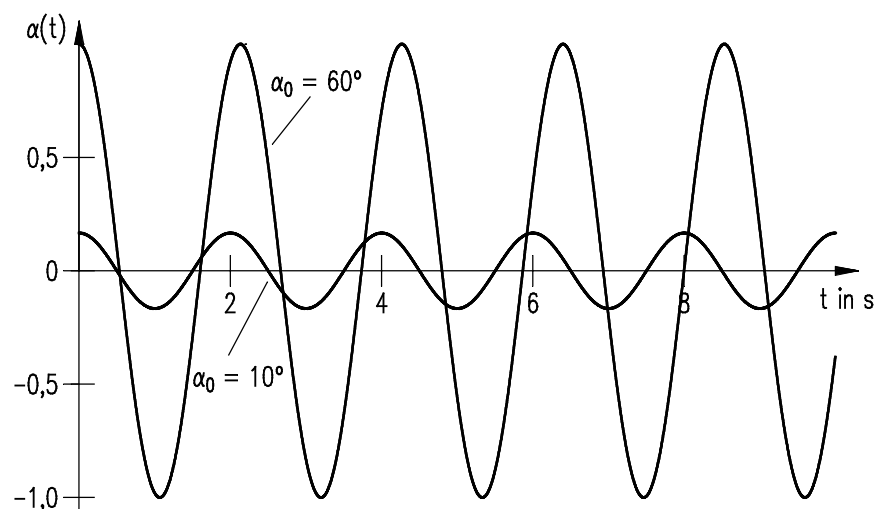


Abbildung 10 Zeitlicher Verlauf der Schwingung eines Fadenpendels bei Auslenkungen von 10° und 60°

Der Unterschied in der Schwingungsdauer zwischen großer und kleiner Auslenkung α_0 wird schon nach wenigen Schwingungsperioden deutlich. Das Schwingungsverhalten für ein Fadenpendel wird exakt durch die Differenzialgleichung

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + (g/l)\sin\alpha = 0$$

beschrieben. Die Lösung dieser Differenzialgleichung, auf deren mathematische Herleitung hier verzichtet wird, ist eine Reihe und es gilt für die Schwingungsdauer T eines Fadenpendel bei großen Auslenkungen α_0 :

$$T = T_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha_0}{2} + \dots\right)$$

Dabei ist $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{l/g}$ die Schwingungsdauer für das idealisierte mathematische Pendel.

In Abbildung 11 ist die Änderung der bezogenen Schwingungsdauer T/T_0 in Abhängigkeit von der maximalen Auslenkung α_0 dargestellt.

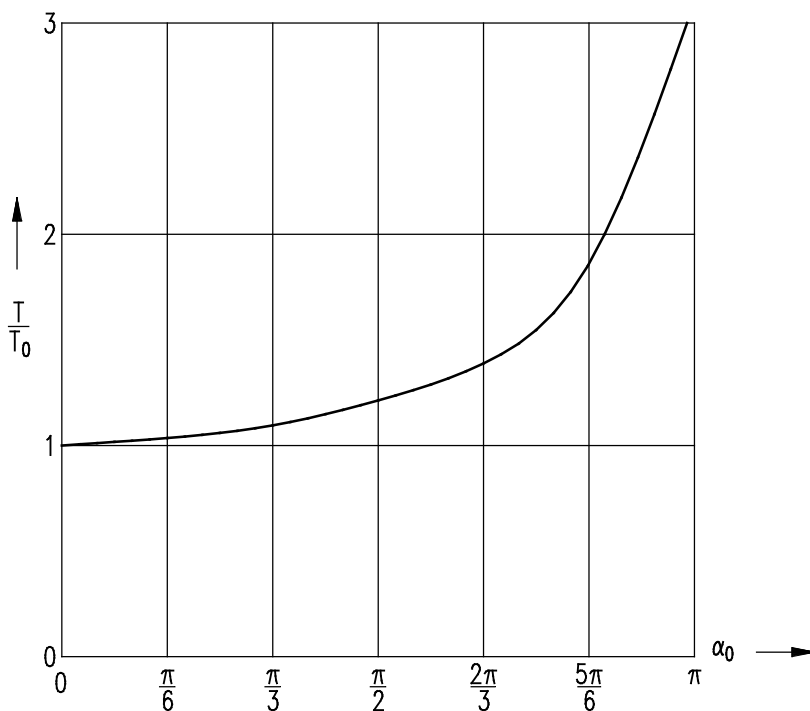


Abbildung 11 Schwingungsdauer T in Abhängigkeit des Auslenkungswinkel α_0 für ein Fadenpendel

Aus dem Verlauf des Grafen ist zu ersehen, dass der Effekt erst ab Winkel größer 30° ($\pi/6$) deutlich wird, wodurch die Näherung bei der obigen Herleitung für Winkel kleiner 10° als sinnvoll bestätigt wird.

Federpendel

Wird an eine elastische Schraubenfeder ein geeigneter Körper der Masse m angehängt, dehnt sich die Feder bis zur stabilen Gleichgewichts- oder Ruhelage bei einer Auslenkung von $y = y_0$. In der Ruhelage sind die Gewichtskraft G und die Federkraft F_{Fe} gleich groß, wirken jedoch in entgegengesetzten Richtungen (Abbildung 12).

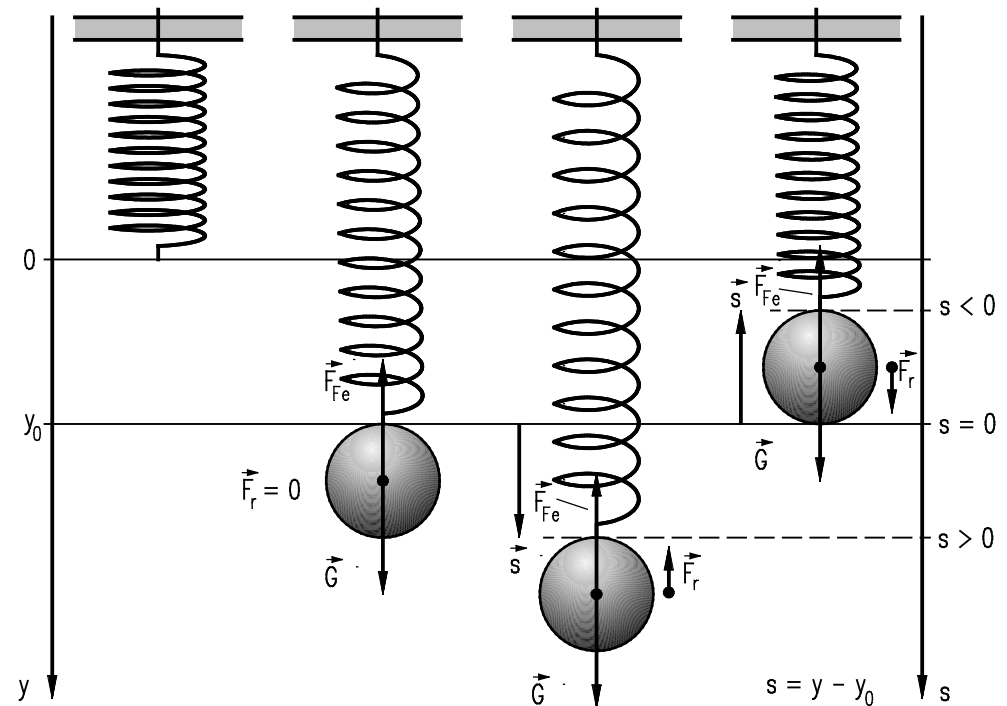


Abbildung 12 Elongation und Kräfte beim Federpendel

Nach dem **Hookeschen Gesetz** ist die Federkraft der Längenänderung y innerhalb der Elastizitätsgrenzen der Feder proportional und es gilt:

$$\vec{F}_{Fe} = -c \cdot \vec{y}$$

Hier ist c die Federsteifigkeit oder Federkonstante (häufig wird die Größe c auch mit D bezeichnet). Für das Kräftegleichgewicht in der Ruhelage bei y_0 gilt, da Elongation y_0 und Erdbeschleunigung g die gleiche Richtung haben:

$$G = m \cdot g = c \cdot y_0$$

Wird die Feder über die Gleichgewichtslage (Abbildung 12) hinaus gedehnt, so wirkt die rücktreibende Kraft

$$F_r = F_{Fe} + G = -c \cdot y + m \cdot g = -c \cdot y + c \cdot y_0$$

oder

$$F_r = -c \cdot (y - y_0).$$

Setzt man $y - y_0 = s$, so erhält man für die rücktreibende Kraft

$$\vec{F}_r = -c \cdot \vec{s}.$$

Befindet sich der Körper oberhalb der Ruhelage ist $s = y - y_0$ negativ und die rücktreibende Kraft wirkt nach unten in Richtung Gleichgewichtslage. Somit gilt für die Schraubenfeder ein lineares Kraftgesetz und die Pendelmasse vollführt eine harmonische Schwingung. Mit $F_r = -m \cdot \omega^2 \cdot s$ gilt:

$$c = m \cdot \omega^2$$

Die Periodendauer der Schwingung eines Federpendels berechnet sich somit nach:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c}}$$

Auch diese Herleitung unterliegt einigen Einschränkungen, insbesondere muss die Masse der Feder gegenüber der Masse des Pendelkörpers vernachlässigt werden können.

Lehrbeispiel 6

Ein an einer Schraubenfeder hängender Körper mit der Masse 200 g wird durch eine Kraft von 0,5 N um 10 cm aus seiner Ruhelage entfernt.

6.1 Berechnen Sie die Schwingungsdauer der entstehenden Schwingung!

6.2 Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der sich der Körper durch die Ruhelage bewegt!

Lösung

Gegeben: $F = 0,5 \text{ N}$; $\hat{s} = 0,1 \text{ m}$; $m = 0,2 \text{ kg}$

Gesucht: T ; v_0

Lehrbeispiel 6.1

Berechnung der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c}} \quad c = \frac{F}{s} = \frac{0,5 \text{ N}}{0,1 \text{ m}} = 5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0,2 \text{ kg}}{5 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} \quad \text{mit } 1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2 \frac{\text{kg}}{50 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}}}{50 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}}}$$

$$T = 1,26 \text{ s}$$

Die Schwingungsdauer beträgt 1,26 Sekunden.

Lehrbeispiel 6.2

Berechnung der Geschwindigkeit im Nulldurchgang

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{1,26 \text{ s}}$$

$$\omega = 5 \text{ s}^{-1}$$

$$v_0 = \hat{s} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$v_0 = \hat{s} \cdot \omega$$

$$v_0 = 0,1 \text{ m} \cdot 5 \text{ s}^{-1}$$

$$v_0 = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_0 = 50 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Horizontaler Federschwinger

Zur Darstellung der Kräfteverhältnisse bei einem horizontalen Federschwinger dient der in Abbildung 13 dargestellte experimentelle Aufbau.

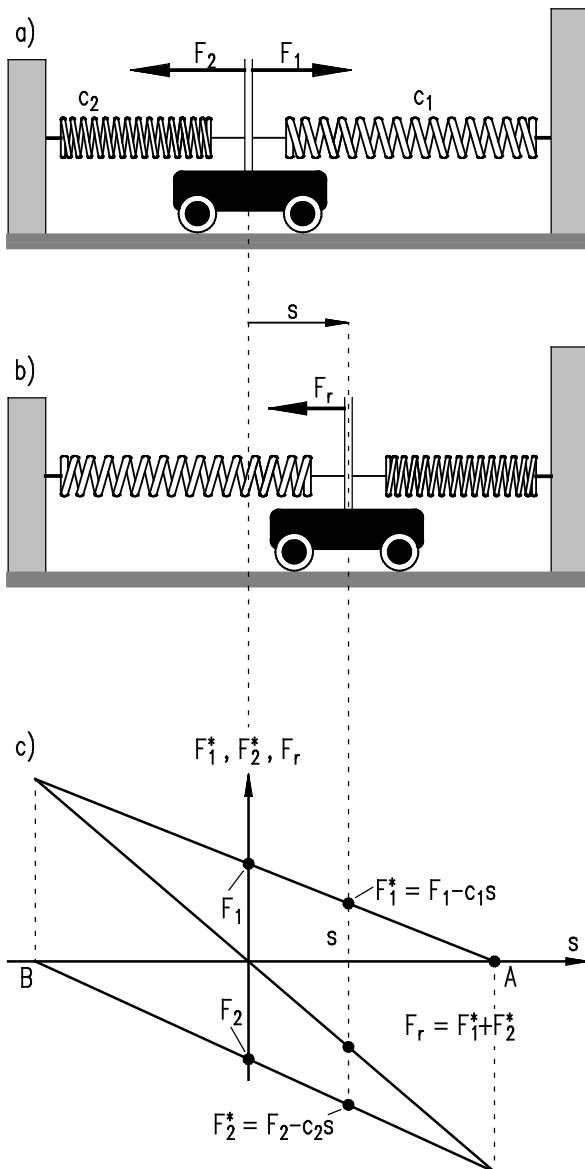


Abbildung 13: Prinzipieller Aufbau und Kräfteverlauf bei einem horizontalen Federschwinger

Ein Experimentierwagen ist zwischen zwei Federn mit den Federsteifigkeiten c_1 und c_2 eingespannt. Beide Federn erzeugen nach dem Hookeschen Gesetz eine der Auslenkung proportionale Kraft F .

In der stabilen Ruhelage bei $s = 0$ (Abbildung 13a) wirken die beiden Federkräfte F_1 und F_2 und es gilt:

$$F_1 = -F_2$$

oder

$$F_1 + F_2 = 0$$

Wird der Wagen in positiver Richtung um eine Strecke s ausgelenkt, wirkt eine Rückstellkraft F_r (Abbildung 13b). Die auf den Schwinger wirkenden Federkräfte ändern sich linear mit $c_1 \cdot s$ und $c_2 \cdot s$ entsprechend den Geraden in Abbildung 13c. Die momentanen Federkräfte F_1^* und F_2^* berechnen sich nach:

$$F_1^* = F_1 - c_1 \cdot s$$

und

$$F_2^* = F_2 - c_2 \cdot s$$

Die rücktreibende Kraft F_r berechnet sich durch Addition der Kräfte F_1^* und F_2^* :

$$F_r = F_1^* + F_2^*$$

$$F_r = F_1 - c_1 \cdot s + F_2 - c_2 \cdot s$$

Mit $F_1 = -F_2$ folgt:

$$F_r = -(c_1 + c_2) \cdot s$$

Bei Elongationen in negativer Richtung ergeben entsprechende Überlegungen das gleiche Ergebnis. Insgesamt ergeben sich für die rückstellende Kraft F_r die in Abbildung 13c dargestellten Geraden. Somit liegt auch beim horizontalen Schwinger, in den Elastizitätsgrenzen der beiden Federn, ein lineares Kraftgesetz vor:

$$F = -c \cdot s \text{ mit } c = c_1 + c_2$$

Beim horizontalen Federschwinger handelt es somit um eine harmonische Schwingung mit der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c}}$$

oder

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}}$$

Lehrbeispiel 7

Ein Wagen mit der Masse 300 g ist zwischen zwei Federn ($c_1 = 10 \text{ N/m}$; $c_2 = 20 \text{ N/m}$) eingespannt. Er wird 10 cm nach rechts ausgelenkt und losgelassen.

7.1 Mit welcher Geschwindigkeit passiert der Wagen die Gleichgewichtslage?

7.2 Berechnen Sie die Zeit, in der der Wagen die Gleichgewichtslage erreicht!

Lösung**Gegeben:** $m = 0,3 \text{ kg}$; $c_1 = 10 \text{ N/m}$; $c_2 = 20 \text{ N/m}$; $\hat{s} = 10 \text{ cm}$ **Lehrbeispiel 7.1****Gesucht:** \hat{v}

$$E_{\text{pot max}} = E_{\text{kin max}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (c_1 + c_2) \cdot \hat{s}^2 = \frac{1}{2} m \cdot \hat{v}^2$$

$$\hat{v} = \hat{s} \cdot \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}$$

$$\hat{v} = 0,1 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{30 \text{ N/m}}{0,3 \text{ kg}}} \quad \text{mit } 1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\hat{v} = 0,1 \text{ m} \cdot \sqrt{100 \frac{\text{kg m}}{\text{kg s}^2 \text{ m}}}$$

$$\hat{v} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Geschwindigkeit des Wagens beim Nulldurchgang beträgt 1 m/s.

Lehrbeispiel 7.2**Gesucht:** t

$$t = \frac{1}{4} \cdot T$$

$$t = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}}$$

$$t = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0,3 \text{ kg}}{(10 + 20) \frac{\text{N}}{\text{m}}}} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{30 \frac{\text{kg m}}{\text{m s}^2}}$$

$$t = 0,157 \text{ s}$$

Der Wagen erreicht nach einer Zeit von $t = 0,157 \text{ s}$ ($T/4$) die stabile Ruhelage.

Auch im Mikrokosmos treten harmonische Schwingungen auf. In Festkörpern und Molekülen sind die Atome durch Bindungskräfte aneinander gebunden.

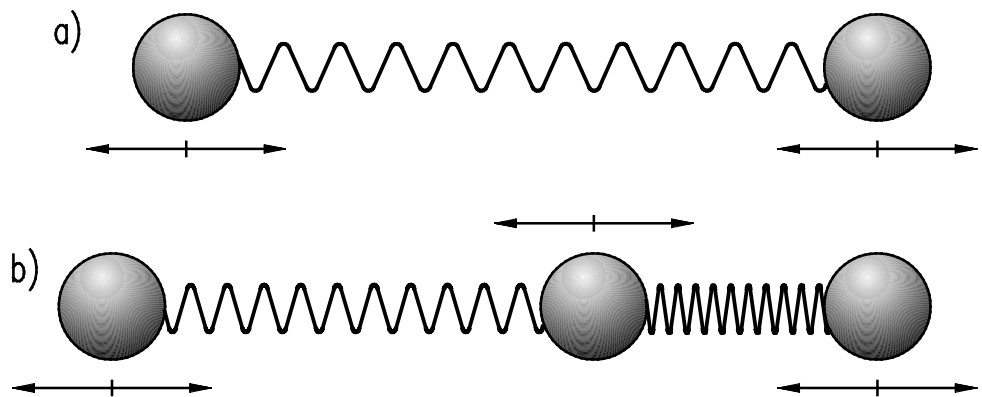


Abbildung 14 Federmodell der Molekülschwingungen

Bei Auslenkung der Atome aus ihrer stabilen Gleichgewichtslage erzeugen die Bindungskräfte eine rücktreibende Kraft entsprechend den Verhältnissen beim horizontalen Schwinger. In Abbildung 14a ist ein Federmodell für zweiatomige und in Abbildung 14b für dreiatomige Moleküle dargestellt. Die Anregung der Atome erfolgt sehr häufig durch Wärmestrahlung (IR-Strahlung).

Überlagerung von Schwingungen

Bei vielen periodischen Bewegungsvorgängen überlagern sich mehrere Schwingungen gleicher oder unterschiedlicher Amplitude und Frequenz. Die resultierende Schwingung hängt dabei wesentlich von der Schwingungsrichtung und der Phasendifferenz der beteiligten Schwingungen ab.

Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen

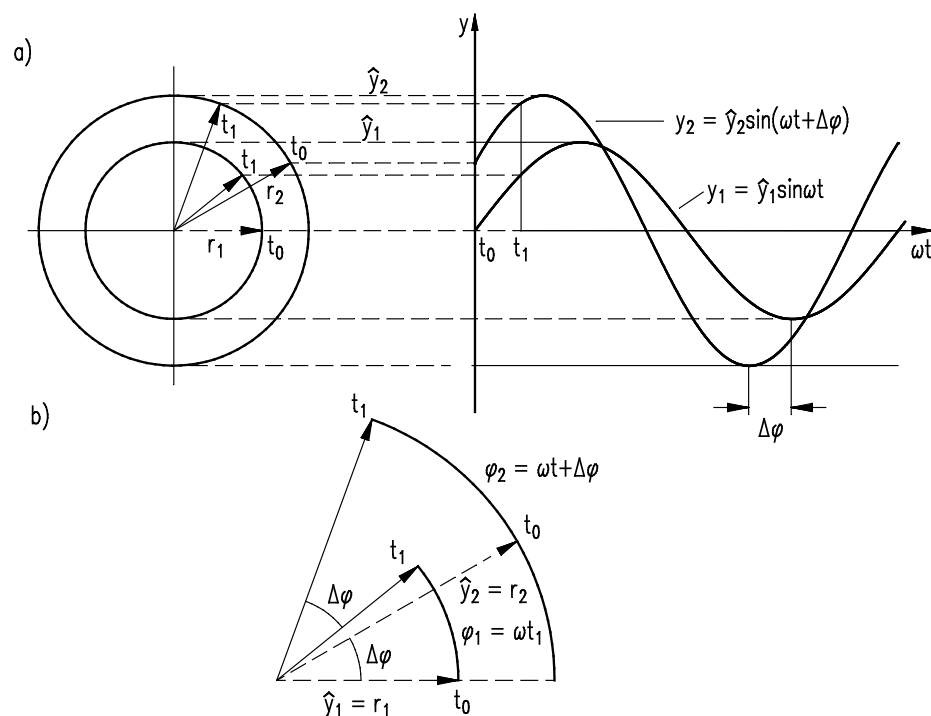


Abbildung 15 Zeigerdarstellung und Zeit-Weg-Diagramm zweier Schwingungen gleicher Frequenz

Für die Darstellung und mathematische Behandlung der Überlagerung mehrerer harmonischer Schwingungen nutzt man wieder das Zeigerdiagramm.

In Abbildung 15a ist die Zeigerdarstellung und das Zeit-Weg-Diagramm zweier harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz mit der Phasendifferenz $\Delta\varphi$ und unterschiedlichen Amplituden dargestellt.

Die Zeigerlängen r_1, r_2 entsprechen wieder den Amplituden der Schwingungen \hat{y}_1 und \hat{y}_2 . Das Zeit-Weg-Diagramm für beide Schwingungen kann durch die Parallelprojektion der beiden Zeiger auf die y-Achse gewonnen werden. Für die dargestellten Schwingungen ergeben sich folgende Gleichungen für den Verlauf der Elongation:

$$y_1 = \hat{y}_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad \text{und} \quad y_2 = \hat{y}_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \Delta\varphi)$$

Aus der Darstellung in Abbildung 15b wird deutlich, dass die zweite Schwingung der Ersten um die Phasendifferenz $\Delta\varphi$ vorseilt. Auf Grund der gleichen Frequenz rotieren die Zeiger mit der gleichen Geschwindigkeit $\omega \cdot t$, die Phasenlage beider Schwingungen ändert sich synchron und die Phasendifferenz bleibt konstant.

In Abbildung 16 ist an drei Beispielen die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz, jedoch unterschiedlicher Amplituden und Phasendifferenzen, in Zeigerdiagrammen und zeitlichen Amplitudenverläufen dargestellt.

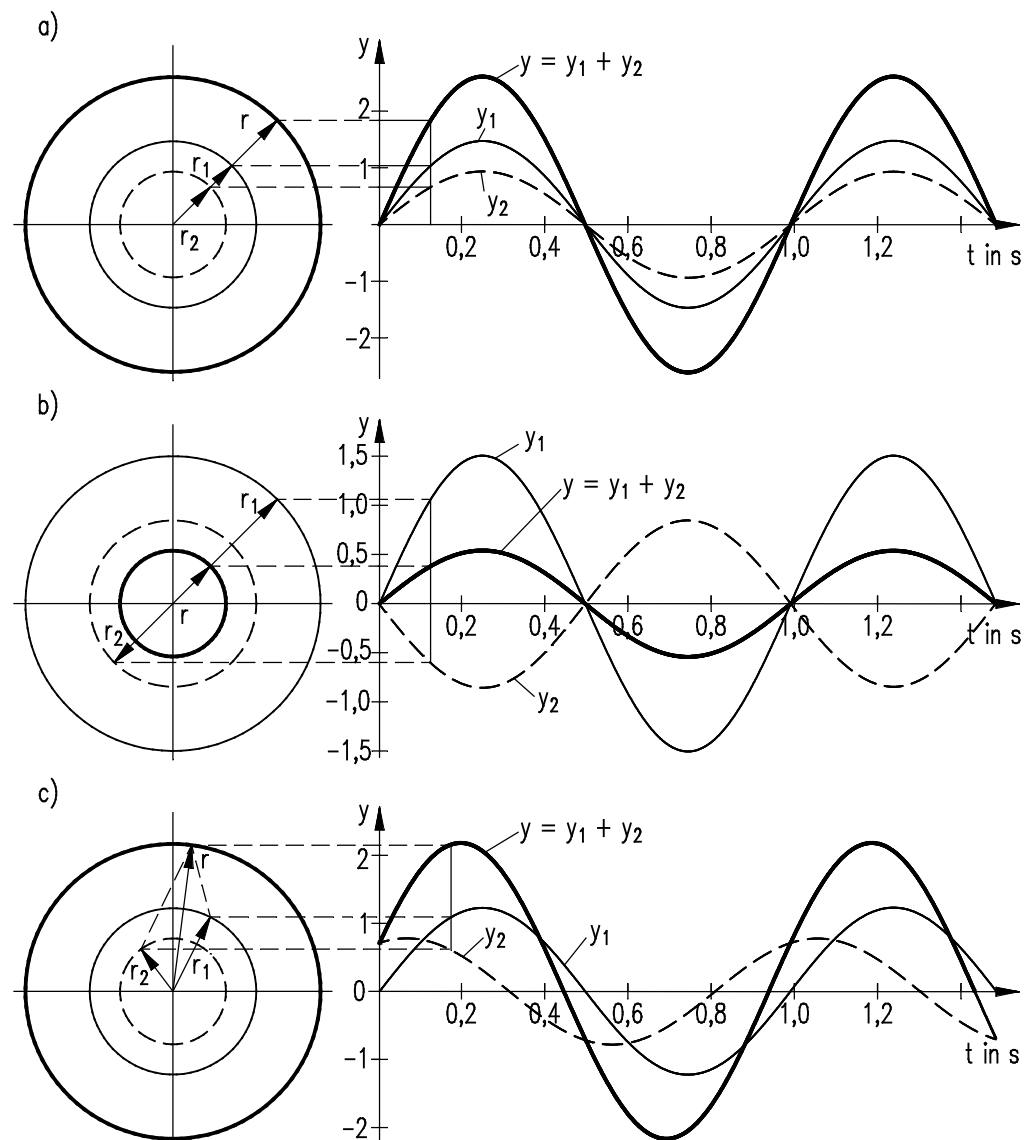


Abbildung 16 Überlagerung zweier gleichfrequenter harmonischer Schwingungen unterschiedlicher Phasendifferenz: a) $\Delta\varphi = 0$, b) $\Delta\varphi = \pi$, c) $\Delta\varphi$ beliebig

Bei den beiden harmonischen Schwingungen in Abbildung 16a haben die Zeiger stets dieselbe Lage. Sie rotieren auf Grund der gleichen Frequenz mit der selben Winkelgeschwindigkeit. Die zwei Elongationen addieren sich zu jedem Zeitpunkt zu einer neuen Schwingung gleicher Frequenz. Die Amplitude der neuen Schwingung ist die Summe der beiden Einzelamplituden.

Bei den in Abbildung 16b dargestellten Schwingungen eilt der Zeiger r_2 der zweiten Schwingung dem Zeiger r_1 der ersten Schwingung mit der Phasendifferenz $\Delta\varphi = \pi$ voraus. Auch hier ist die Amplitude der neuen Schwingung die Addition der zwei Einzelamplituden. Sind die Amplituden der sich überlagernden Schwingungen gleich, ergibt sich bei der Phasendifferenz von $\Delta\varphi = \pi$ völlige Auslöschung.

Bei den in Abbildung 16c angeführten Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen ist die Phasendifferenz $\Delta\varphi$ beliebig. Auch hier führt die Überlagerung zu einer Schwingung gleicher Frequenz, die Amplitude zu jedem Zeitpunkt ergibt sich aus der vektoriellen Addition der beiden Zeiger.

Generell gilt für die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz:

Zwei harmonische Schwingungen gleicher Frequenz überlagern sich zu einer harmonischen Schwingung gleicher Frequenz. Die Amplitude und die Phasenlage der resultierenden Schwingung ergibt sich aus der vektoriellen Addition der Zeiger der beiden Schwingungen.

Schwebung

Bei der Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen mit geringfügig unterschiedlicher Frequenz und gleicher Amplitude wird die entstehende Schwingung mit Schwebung bezeichnet.

In Abbildung 17 sind die Zeit-Weg-Funktionen zweier Schwingungen mit $f_1 = 500$ Hz (Abbildung 17a) und $f_2 = 440$ Hz (Abbildung 17b) sowie die Zeit-Weg-Funktionen der Überlagerung $y = y_1 + y_2$ (Abbildung 17c) in Diagrammen dargestellt.

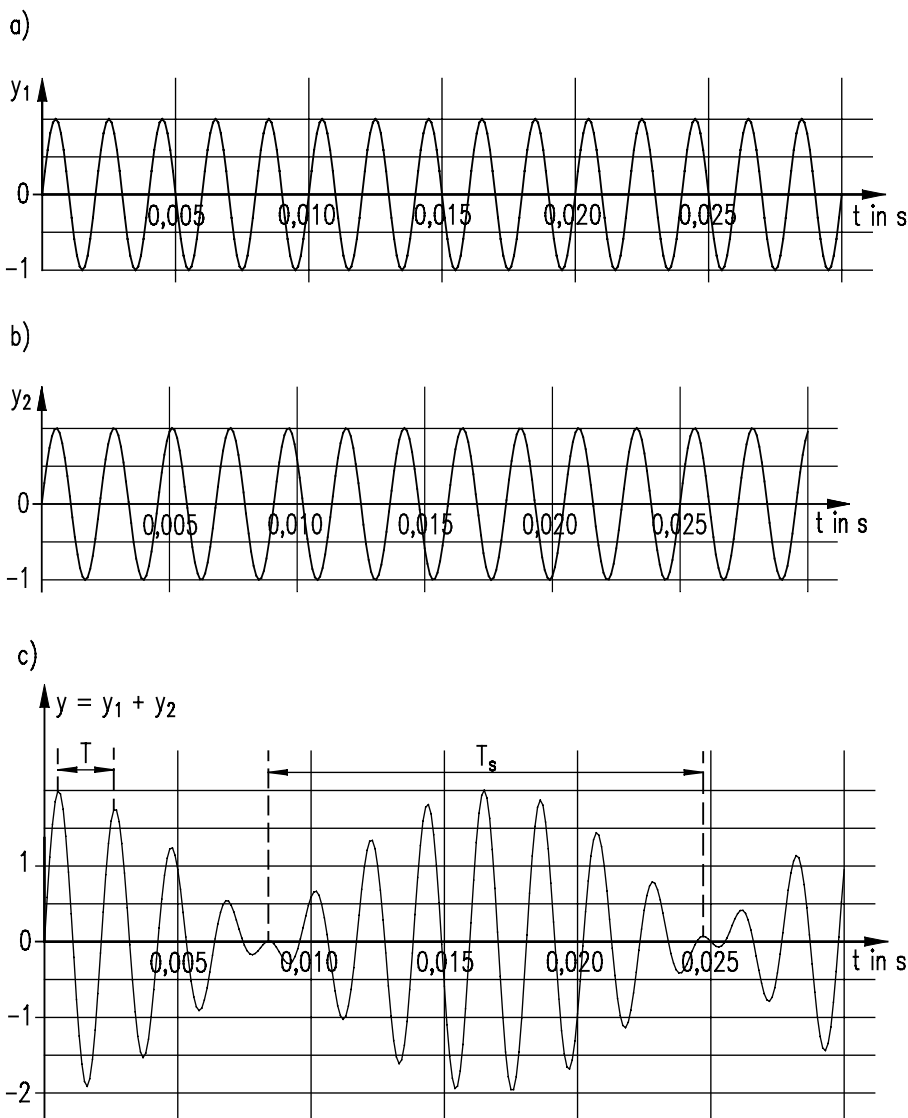


Abbildung 17 Zeitfunktionen zweier harmonischer Schwingungen unterschiedlicher Frequenz

Wie aus Abbildung 17c zu erkennen ist, entsteht eine Schwingung mit einer neuen **Frequenz f** , dem **Schwebungston**, und die Amplitude der Schwebung schwankt periodisch zwischen einem Maximalwert und einem Minimum. Die Frequenz der Amplitudenschwankung wird als **Schwebungsfrequenz f_s** bezeichnet.

Stellt man die sich überlagernden Schwingungen in einem Zeigerdiagramm dar, so ändert sich die Phasendifferenz $\Delta\varphi$ zwischen den beiden Zeigern auf Grund der unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 fortlaufend. Daher ändert sich auch die Amplitude der Überlagerung ständig.

Bei der Phasendifferenz $\Delta\varphi = 0$ ist die Amplitude maximal, bei der Phasendifferenz $\Delta\varphi = \pi$ ist die Amplitude minimal, bei gleichen Amplituden der sich überlagernden Schwingungen gleich Null.

Die Zeit, die von einer Phasenlage der beiden Zeiger bis zum Erreichen der gleichen Phasenlage, z.B. $\Delta\varphi = \pi$, verstreicht wird als Schwingungsdauer der Schwebung T_s bezeichnet. Beim Erreichen der gleichen Phasenlage hat der Zeiger mit der größeren Winkelfrequenz einen Umlauf mehr gemacht und damit den Winkel 2π mehr überstrichen, es gilt:

$$2\pi = (\omega_1 - \omega_2) \cdot T_s = 2\pi \cdot (f_1 - f_2) \cdot T_s$$

oder

$$\frac{2\pi}{T_s} = 2\pi \cdot (f_1 - f_2)$$

Da $f_s = 1/T_s$ gilt, folgt für die **Schwebungsfrequenz**:

$$f_s = f_1 - f_2$$

Die Frequenz des Schwebungstones f ergibt sich aus folgender Überlegung. Beim Zusammenfallen der beiden Zeiger der sich überlagernden Schwingungen hat auch der Summenzeiger die gleiche Lage. Mit zunehmender Zeit vergrößert sich die Phasendifferenz zwischen den Zeigern, wobei der Summenzeiger dem schnelleren Zeiger stets nacheilt.

Bei einer Phasendifferenz von $\Delta\varphi = \pi$ hat der Summenzeiger einen viertel Umlauf weniger gemacht als der Schnellere. Bis zum erneuten Zusammenfallen beider Zeiger macht der Summenzeiger abermals eine viertel Umdrehung weniger. Zwischen zwei Maxima der Schwebung, d.h. nach der Periodendauer der Schwebung T_s , gilt für die Anzahl n_{su} des Summenzeigers:

$$n_{su} = n_1 - \frac{1}{2}$$

Die Anzahl der Umläufe des Schnelleren Zeigers n_1 berechnet sich aus der Schwebungsperiode T_s und seiner Schwingungsdauer T_1 :

$$n_1 = \frac{T_s}{T_1} = \frac{2\pi \omega_1}{2\pi (\omega_1 - \omega_2)} = \frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2}$$

Hierbei gilt $T_s = 2\pi/(\omega_1 - \omega_2)$, $\omega_1 = 2\pi/T_1$ und $\omega_2 = 2\pi/T_2$. Die Umläufe des Summenzeigers berechnen sich nach:

$$n_{su} = n_1 - \frac{1}{2} = \frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} - \frac{1}{2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2(\omega_1 - \omega_2)}$$

Die Frequenz des Schwebungstones berechnet sich aus der Anzahl n_{Su} der Umläufe des Summenzeigers während der Periodendauer der Schwebung nach $f = n_{Su}/T_S$:

$$f = \frac{(\omega_1 + \omega_2) \cdot (\omega_1 - \omega_2)}{2 \cdot (\omega_1 - \omega_2) \cdot 2\pi} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{4\pi}$$

Mit $2\pi \cdot f = \omega$ ergeben sich:

Kreisfrequenz des Schwebungstones

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

Frequenz des Schwebungstones

$$f = \frac{(f_1 + f_2)}{2}$$

Man erkennt aus den Ausführungen: Je näher die Frequenzen beieinander liegen, umso länger dauert das An- und Abschwellen der Schwebung.

Nichtharmonische Schwingungen

Viele periodische Bewegungsvorgänge sind nicht harmonisch, wie z.B. die Dreieckschwingung in Abbildung 18a.

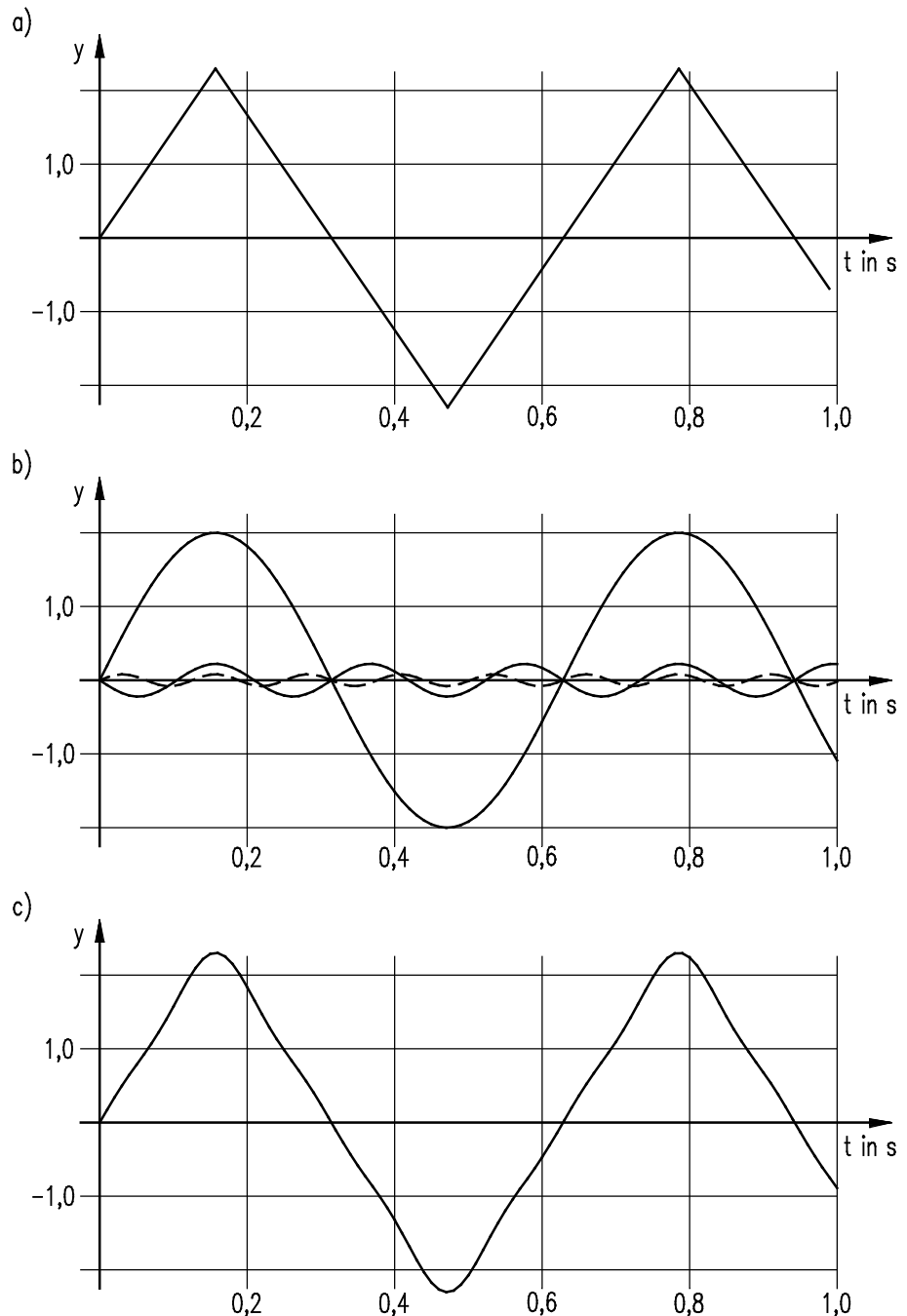


Abbildung 18 Dreieckschwingung und Überlagerung von drei harmonischen Schwingungen

Die harmonischen Schwingungen haben eine besondere Bedeutung in der Schwingungslehre, da alle periodischen und nichtperiodischen Vorgänge durch die Überlagerung von harmonischen Schwingungen mit bestimmten Frequenzen und Amplituden erzeugt werden können.

Die im 19. Jahrhundert von dem Franzosen J. B. J. Fourier entwickelte und nach ihm benannte mathematische Theorie, die **Fourier-Analyse**, ermöglicht die Untersuchung, welche Frequenzen und Amplituden für die Beschreibung eines Vorganges benötigt werden.

Mit der Fourier-Analyse ist es möglich, für jede beliebige mathematische Funktion die Sinus- und Kosinusfunktionen mit ihren Argumenten und Vorfaktoren zu berechnen, deren Addition gleich der gegebenen Funktion ist.

Die Fourier-Analyse der in Abbildung 18a dargestellten Dreieckschwingung ergibt folgende Summenfunktion (näherungsweise):

$$f(t) = \frac{7}{\pi} \left[\sin(\omega \cdot t) - \frac{1}{3^2} \cdot \sin(3\omega \cdot t) + \frac{1}{5^2} \cdot \sin(5\omega \cdot t) - \dots \right]$$

Die einzelnen zeitlichen Verläufe der drei ersten Summanden sind in Abbildung 18b, die Addition dieser drei Kurven ist in Abbildung 18c dargestellt.

Man erkennt, dass die Dreieckschwingung schon durch drei Glieder der Summenfunktion in guter Näherung wiedergegeben wird. Generell gilt, je größer die Anzahl der Summenglieder, desto besser wird die vorgegebene Funktion angenähert.

1.2 Dämpfung und Resonanz

Eigenfrequenz

Wird ein schwingungsfähiges System angeregt und sich selbst überlassen, so vollführt es **freie Schwingungen**. Bei dem einfachen idealen Fadenpendel und dem Federpendel stellt sich immer eine bestimmte Frequenz, die **Eigenfrequenz f_0** , ein und es gibt nur eine Schwingungsform.

Bei komplizierter aufgebauten Schwingungssystemen können verschiedene Schwingungen mit verschiedenen Eigenfrequenzen beim gleichen Körper auftreten.

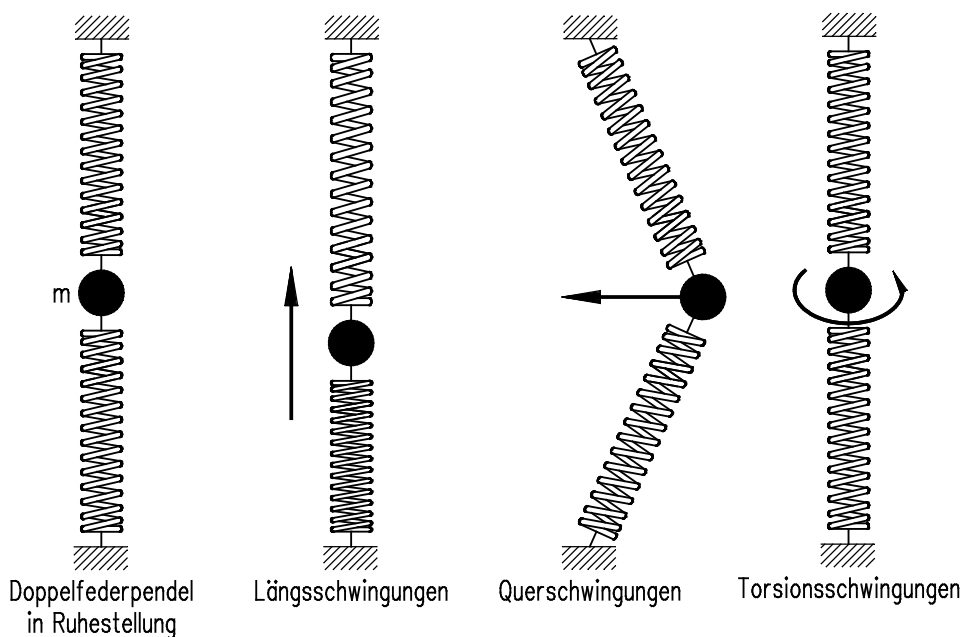


Abbildung 19 Eigenschwingungen eines Pendelkörpers zwischen zwei Schraubenfedern

Bei dem in Abbildung 19 dargestellten System ist ein Pendelkörper mit zwei Schraubenfedern senkrecht angeordnet. Bei diesem System sind, wie in der Abbildung 19 dargestellt, schon drei Eigenschwingungen möglich, mit drei verschiedenen Eigenfrequenzen.

Beim Einbau jedes weiteren Körpers, der mit Schraubenfedern an dieses System angehängt wird, vergrößert sich die Anzahl der Eigenschwingungen.

Dämpfung

Jeder freie, d.h. sich selbst überlassene Schwingungsvorgang kommt innerhalb einer bestimmten Zeitspanne zur Ruhe. Jeder Schwingung wird durch **Reibungsvorgänge** Energie entzogen. Eine Schwingung gibt also ständig Energie an die Umgebung ab, sie wird gedämpft.

Bei der Dämpfung kann generell zwischen Reibungsvorgängen mit konstanter Kraft, z.B. bei der Gleitreibung, und geschwindigkeitsabhängigen Kräften, z.B. Dämpfung durch den Reibungswiderstand von Flüssigkeiten und Gasen, unterschieden werden.

Bei den ersteren kommt es zu einer linearen Abnahme der Amplitude, bei den zweiten ist die Abnahme der Amplitude exponentiell.

In Abbildung 20a ist der zeitliche Verlauf einer Schwingung mit geschwindigkeitsabhängiger Dämpfung dargestellt.

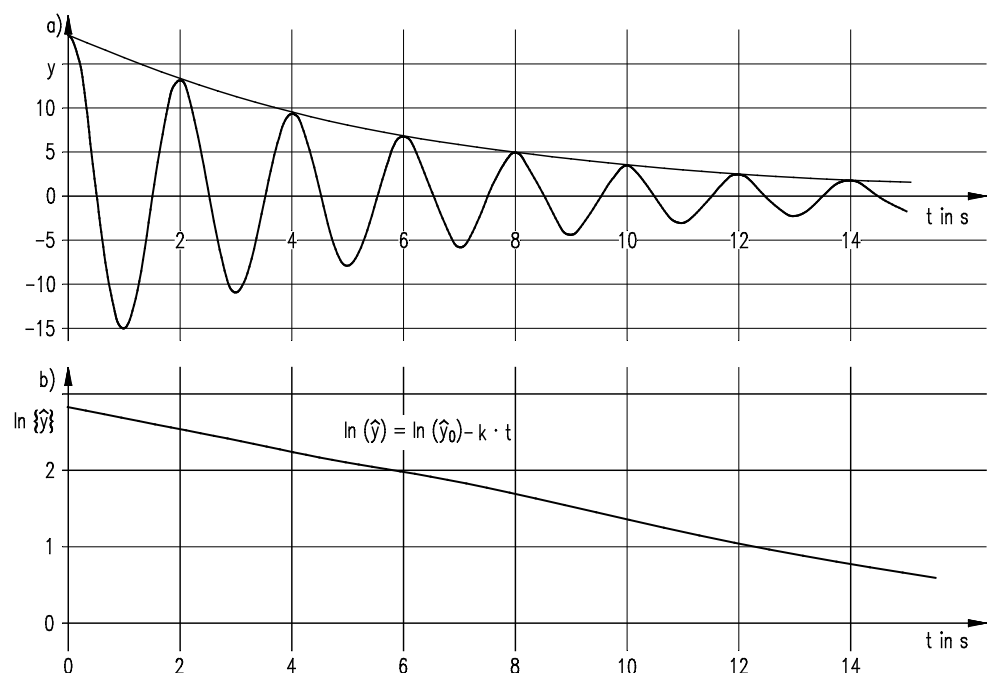


Abbildung 20 a) Zeitlicher Verlauf einer gedämpften Schwingung, b) logarithmische Darstellung des Zeit-Amplituden-Diagramms

Bestimmt man die Amplituden der gedämpften Schwingung und trägt den natürlichen Logarithmus $\ln(\hat{y})$ gegen die Zeit t auf, erhält man die in Abbildung 20b dargestellte Gerade. Die Gleichung dieser Geraden lautet:

$$\ln(\hat{y}) = \ln(\hat{y}_0) - k \cdot t$$

Hierbei sind \hat{y}_0 die Anfangsamplitude bei $t = 0$; ω_0 die Kreisfrequenz der freien ungedämpften Schwingung und **k** der **Dämpfungskoeffizient** des Systems.

Das Entlogarithmieren der Geradengleichung ergibt die **Zeitabhängigkeit der Amplitude**:

$$\hat{y} = \hat{y}_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

Die Exponentialfunktion beschreibt die zeitliche Abnahme der Amplitude der gedämpften Schwingung. Die Zeit-Weg-Funktion einer gedämpften Schwingung lautet:

$$y = \hat{y}_0 \cdot e^{-k \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Diese Gleichung ist solange gültig, wie die Dämpfung nicht zu groß ist, und die Periodendauer der gedämpften Schwingung mit der ungedämpften übereinstimmt.

Bei sehr großen Dämpfungskonstanten k kommt es zum **aperiodischen Grenzfall**. Die Masse schwingt nicht mehr, sondern bewegt sich langsam in die Ausgangslage zurück.

Dieser Grenzfall findet z.B. bei der Federung von Fahrzeugen seine praktische Anwendung. Die Dämpfung wird durch die Stoßdämpfer so eingestellt, dass das System möglichst schnell und ohne Schwingungen in die Ruhelage zurückkehrt.

Erzwungene Schwingung

Da alle realen Schwingungen mehr oder weniger gedämpft sind und dadurch Energie an die Umgebung abgeben, muss zur Aufrechterhaltung der Amplitude, dem schwingenden System Energie zugeführt werden. Die zugeführte Energie muss dabei gleich der vom System abgegebenen Energie sein. Eine solche angetriebene Schwingung heißt **erzwungene Schwingung**.

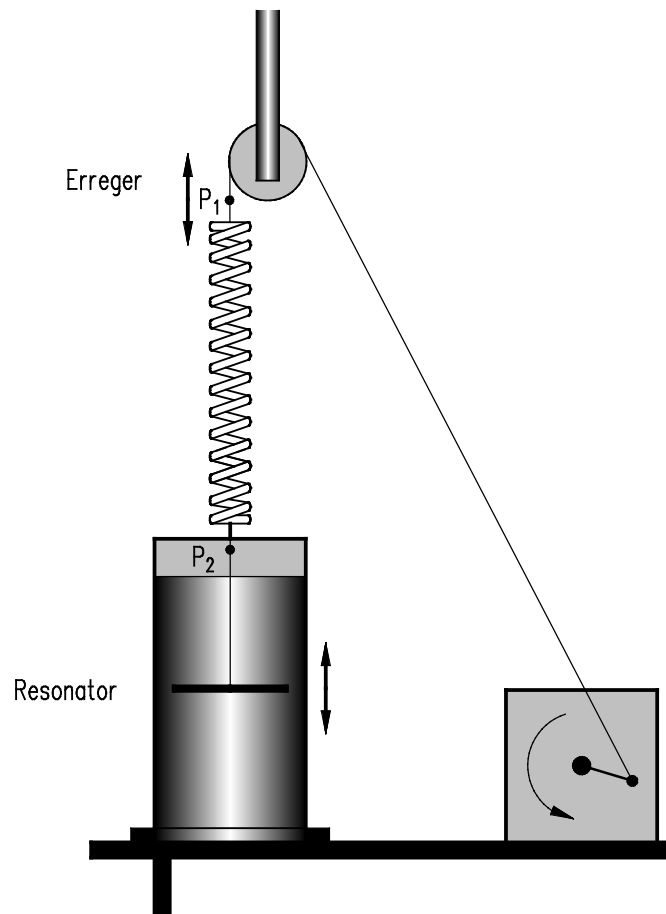


Abbildung 21 Experimenteller Aufbau zur Untersuchung erzwungener Schwingungen

Bei dem in Abbildung 21 dargestellten Versuchsaufbau wird ein Federpendel über einen Exzenter durch einen Motor zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Der zeitliche Verlauf der Erregerschwingung kann am Punkt P_1 , der zeitliche Verlauf der Schwingung des Pendelkörpers, **Resonator**, kann am Punkt P_2 beobachtet werden.

Resonanz

Man beobachtet, dass der Pendelkörper mit der Frequenz des Erregers schwingt, jedoch zwischen beiden Schwingungen eine Phasendifferenz $\Delta\varphi$ besteht. Zudem ist zu beobachten, dass die Amplitude und die Phasendifferenz von der Kreisfrequenz ω_E des Erregers, und damit von der Erregerfrequenz f_E abhängt.

Trägt man die Amplitude des Resonators und die Phasendifferenz zwischen den Schwingungen in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz der Erregers auf, erhält man die in Abbildung 22 dargestellten Kurven.

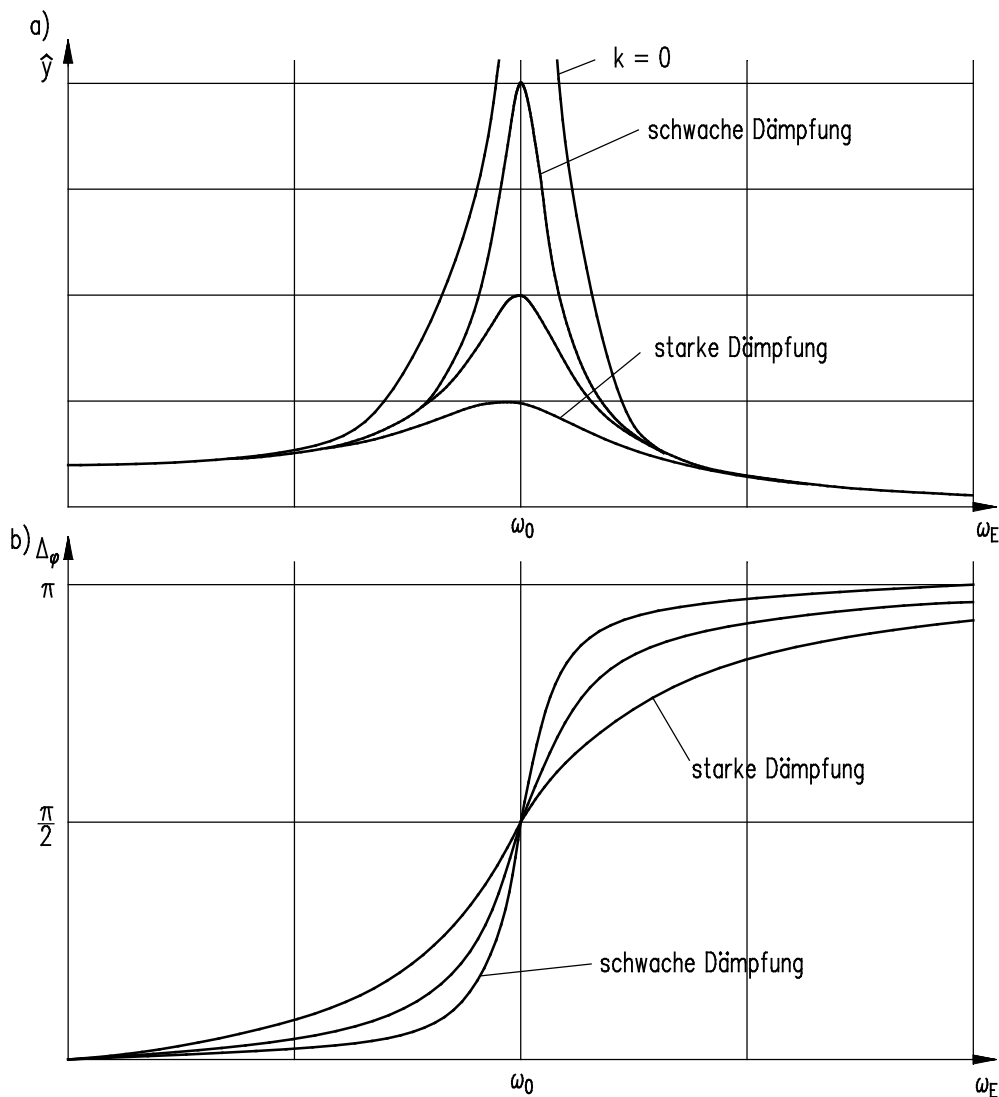


Abbildung 22 Resonanzverhalten bei einer erzwungenen Schwingung
a) Amplitude des Resonators; b) Phasendifferenz

Je nach der Höhe der Dämpfung kommt es zu einem mehr oder weniger stark ausgeprägten Maximum, wenn die Kreisfrequenz des Erregers ω mit der Kreisfrequenz des Resonators ω_0 übereinstimmt.

Die Phasenverschiebung zwischen beiden Schwingungen $\Delta\varphi$ ist dann $\pi/2$.

Das Auftreten einer maximalen Amplitude bei einer bestimmten Frequenz wird als **Resonanz** bezeichnet, die Frequenz heißt **Resonanzfrequenz**. Der Kurvenverlauf von Abbildung 22a wird als **Resonanzkurve** bezeichnet.

Bei fehlender Dämpfung $k = 0$ kann es zur **Resonanzkatastrophe** kommen.

Beispiele für Resonanzkatastrophen sind der Zusammenbruch einer Brücke unter einer im Gleichschritt marschierenden Truppe, Windbruch im Wald oder die Zerstörung von Fundamenten bei großen Maschinen. Bei allen Erscheinungen muss die Erregerfrequenz mit der Eigenfrequenz des Systems übereinstimmen.

Aufgaben

Der Resonanzfall ist in der Technik von großer Bedeutung, da er eine optimale Energieübertragung ermöglicht. Im Resonanzfall kann eine Schwingung mit einem Minimum an Energiezufuhr aufrechterhalten werden.

Wird die Energiezufuhr durch den Resonator gesteuert, liegt eine **Rückkopplung** vor, wie sie z.B. in mechanischen Uhren genutzt wird.

Aufgabe 1

Welche Bedingungen muss ein Bewegungsablauf erfüllen, um in der Physik allgemein als Schwingung zu gelten?

Aufgabe 2

Begründen Sie, warum eine Kreisbewegung keine Schwingung darstellt!

Aufgabe 3

Beschreiben Sie die physikalische Bedeutung von Elongation und Amplitude, sowie den Zusammenhang zwischen beiden!

Aufgabe 4

Geben Sie die Definition einer harmonischen Schwingung mithilfe des Zeit-Weg-Gesetzes an!

Aufgabe 5

Erklären Sie in Worten und Formeln das Kraft-Weg-Gesetz für die harmonischen Schwingungen!

Aufgabe 6

Beschreiben Sie das Kraftgesetz für ein Federpendel!

Aufgabe 7

Wie ändert sich die Ruhelage und die Schwingungsdauer, wenn ein Federpendel an einem Ort mit veränderter Fallbeschleunigung gebracht wird?

Aufgabe 8

Wovon ist die Schwingungsdauer eines Fadenpendels abhängig?

Aufgabe 9

Beschreiben Sie den Einfluss, den die Amplitude eines Fadenpendels auf die Größen der harmonischen Schwingung bei kleinen Auslenkungen ($\alpha_0 < 10^\circ$) hat!

Aufgabe 10

Wie ändert sich die Schwingungsdauer eines Fadenpendels bei großen Auslenkungen α ?

Aufgabe 11

Beschreiben Sie die Ursache der rückstellenden Kraft bei einem Fadenpendel!

Aufgabe 12

Beschreiben Sie den Einfluss der Masse auf die Schwingungsdauer eines Fadenpendels!

Aufgabe 13

Beschreiben und begründen Sie die Änderung der Schwingungsdauer eines Fadenpendels mit einer Masse aus Stahl, wenn unterhalb der Ruhelage ein starker Magnet gestellt wird!

Aufgabe 14

Eine vertikal aufgehängte Schraubenfeder wird mit einer Masse von 500 g belastet. Nach dem Anhängen einer weiteren Masse von 700 g hat sich die Feder um 28 cm gedehnt. Die Feder mit der Gesamtmasse wird aus der Ruhelage ausgelenkt.

Berechnen Sie die Schwingungsdauer des Pendels!

Aufgabe 15

Ein Körper der Masse $m = 250$ g hängt an einer Feder, die durch eine Kraft von 0,5 N um 2,0 cm gedehnt wird. Das Federpendel wird um 4,0 cm nach unten ausgelenkt und dann losgelassen.

15.1 Berechnen Sie die Federkonstante c der Feder sowie die Schwingungsdauer T und die Kreisfrequenz der Schwingung!

15.2 Geben Sie das Zeit-Weg-Gesetz an, wenn nach der einmaligen Auslenkung nach unten zur Zeit $t = 0$ die Ruhelage erreicht wird!

15.3 Beschreiben Sie die Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit des Pendels!

15.4 Welche Geschwindigkeit und welche Bewegungsrichtung hat der Pendelkörper nach der Zeit $T/2$?

Aufgabe 16

Zur Bestimmung der Erdbeschleunigung g wird ein Fadenpendel der Länge 1,0 m verwendet. Für 20 Schwingungen wird eine Zeit von 39 s gemessen.

16.1 Berechnen Sie die Erdbeschleunigung g !

16.2 Bestimmen Sie die Abweichung vom Tabellenwert ($9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$) und nennen Sie mögliche Ursachen für die Abweichung!

Aufgabe 17

Bestimmen Sie das Verhältnis der Periodendauern T_1 und T_2 wenn die Länge eines Fadenpendels auf die Hälfte reduziert wird!

Aufgabe 18

An einer Feder mit der Richtgröße $c = 100 \text{ N/m}$ schwingt ein Körper mit der Frequenz $f = 2,0 \text{ Hz}$.

Bestimmen Sie die Masse des Körpers!

Aufgabe 19

Ein Körper schwingt harmonisch mit der Schwingungsdauer $T = 5 \text{ s}$ und der Amplitude $\hat{y} = 2,5 \text{ cm}$.

Zeichnen Sie das Zeit-Weg-Diagramm und das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm der Schwingung für zwei Schwingungsperioden!

Aufgabe 20

Ein Federpendel mit der Richtgröße $c = 75 \text{ N/m}$ und der Masse $m = 0,20 \text{ kg}$ schwingt harmonisch.

Berechnen Sie die auf die Masse wirkende Beschleunigung bei einer Elongation von $6,0 \text{ mm}$!

Aufgabe 21

Ein Körper der Masse $m = 4,0 \text{ kg}$ schwingt harmonisch mit der Amplitude $\hat{y} = 10 \text{ cm}$ und der Frequenz $f = 0,40 \text{ Hz}$. Zur Zeit $t = 0 \text{ s}$ sei die Auslenkung Null.

Bestimmen Sie die Auslenkung, die Beschleunigung und die rücktreibende Kraft zur Zeit $t = 7/6 \text{ s}$!

Aufgabe 22

Ein Wagen mit der Masse 500 g ist zwischen zwei Federn ($c_1 = 20 \text{ N/m}$; $c_2 = 30 \text{ N/m}$) eingespannt. Er wird 10 cm nach rechts ausgelenkt und losgelassen.

22.1 Bestimmen Sie die Periodendauer der Schwingung!

22.2 Mit welcher Geschwindigkeit passiert der Wagen die Gleichgewichtslage?

Aufgabe 23

In einem U-Rohr mit konstantem Querschnitt befindet sich eine Flüssigkeitssäule der Gesamtlänge l . Ein kurzer Luftstoß versetzt die Flüssigkeitssäule in Schwingung.

Zeigen Sie, dass die Periodendauer der Schwingung nur von der Länge der Flüssigkeitssäule abhängt, und der Querschnitt keinen Einfluss hat!

Hinweis: Berechnen Sie die rückstellende Kraft, wenn die Flüssigkeitssäule auf der einen Seite um die Strecke y_1 angehoben und auf der anderen Seite um y_1 abgesenkt ist.

Aufgabe 24

Erklären Sie die Begriffe „freie Schwingung“ und „erzwungene Schwingung“!

Aufgabe 25

Beschreiben Sie die Wirkung und die Ursache der Dämpfung bei den Schwingungen!

Aufgabe 26

Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Elongation einer gedämpften Schwingung!

Aufgabe 27

Erklären Sie den Begriff Resonanz und beschreiben Sie die Resonanzbedingungen!

Aufgabe 28

Skizzieren Sie den Verlauf der Resonanzkurven bei schwacher und starker Dämpfung bei erzwungenen Schwingungen!

Aufgabe 29

Nennen Sie einige Beispiele für Resonanzerscheinungen!

Lernbereich

2 Wellen

Für die Wellenbewegung sind Wasserwellen sehr anschauliche Beispiele. Auch ist die Schallausbreitung bekannt für eine Wellenbewegung im Raum. Mechanische lineare Wellen beobachtet man auf Seilen oder an einer Reihe gekoppelter Pendel. Aber auch in anderen Teilgebieten der Physik ist die Welle ein wichtiges Modell zur Beschreibung vieler physikalischer Vorgänge.

Fortschreitende lineare Wellen

Für die Beschreibung der Grundbegriffe und Gesetzmäßigkeiten bei der Wellenbewegung dient das einfachste Modell eines linearen Wellenträgers, eine **Kette gekoppelter Pendel**.

Bei dem gekoppelten Pendel handelt es sich um eine größere Anzahl von Fadenpendeln gleicher Länge und damit gleicher Eigenfrequenz, die äquidistant längs einer Linie angeordnet sind (Abbildung 23). Die einzelnen Pendel sind durch Drähte, an denen kleine Gewichtsstücke hängen, miteinander verbunden, sie sind mechanisch gekoppelt.

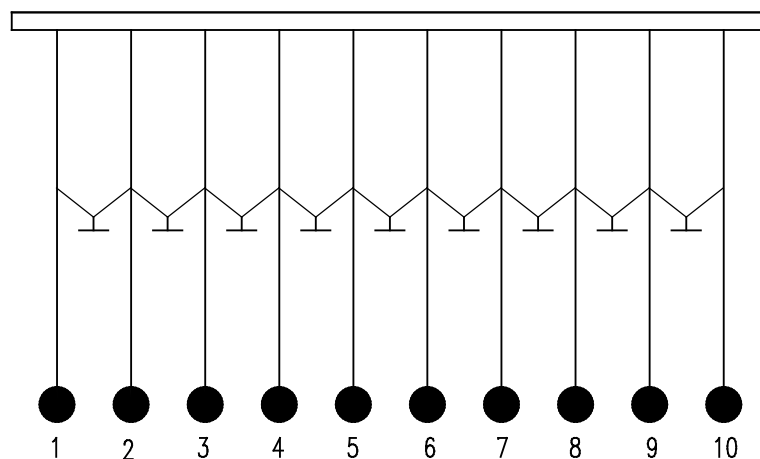


Abbildung 23 Linear gekoppeltes Pendel

Pendel 1 wird senkrecht zur Oszillatorkette, in Abbildung 23 also senkrecht zur Zeichenebene, angestoßen. Ohne die Drähte würde Pendel 1 eine gedämpfte Schwingung ausführen. Auf Grund der Kopplung durch die Drähte überträgt sich die Schwingung von Pendel zu Pendel. Durch den Impuls beim Anstoßen des ersten Pendels wird die Gleichgewichtslage der Oszillatorkette an dieser Stelle gestört, und die Störung wird durch die Kopplung von dem ersten Pendel auf das zweite Pendel, von dem zweiten auf das dritte Pendel usw. übertragen.

Der auf das erste Pendel übertragene Impuls, und damit Schwingungsenergie, wandert durch die Kette der Oszillatoren. Auf Grund von Energieverlusten durch Reibung nimmt die Amplitude der Schwingung mit zunehmendem Abstand vom Ausgangspunkt der Störung (Pendel 1) allmählich ab.

Wird Pendel 1 am Anfang der Oszillatorkette mit konstanter Frequenz hin und her bewegt, wiederholen die nachfolgenden Oszillatoren, sobald sie von der Störung erreicht werden, die Schwingung des Erregers. Die Pendel führen **erzwungene Schwingungen** mit gleicher Frequenz und etwa gleicher Amplitude wie der Erreger aus. Bei der Beobachtung der einzelnen Pendel der Oszillatorkette wird deutlich, dass benachbarte Pendel nicht in Phase schwingen (Abbildung 24).

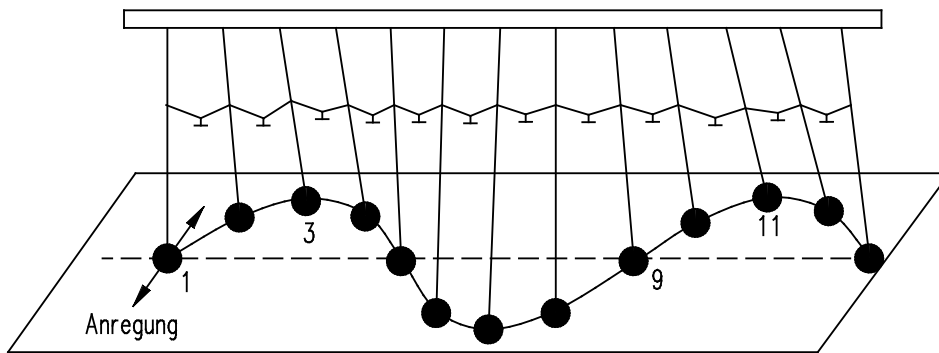


Abbildung 24 Lineare Welle

Die Schwingungszustände des Erregers, z.B. der Nulldurchgang oder die Amplitude, laufen zeitlich über die Kette der gekoppelten Pendel hinweg, es entsteht eine **fortschreitende lineare Welle**.

Führen die einzelnen Oszillatoren der Kette eine harmonische Schwingung aus, entsteht eine **lineare harmonische Welle**.

Schwingungsdauer T und Wellenlänge λ

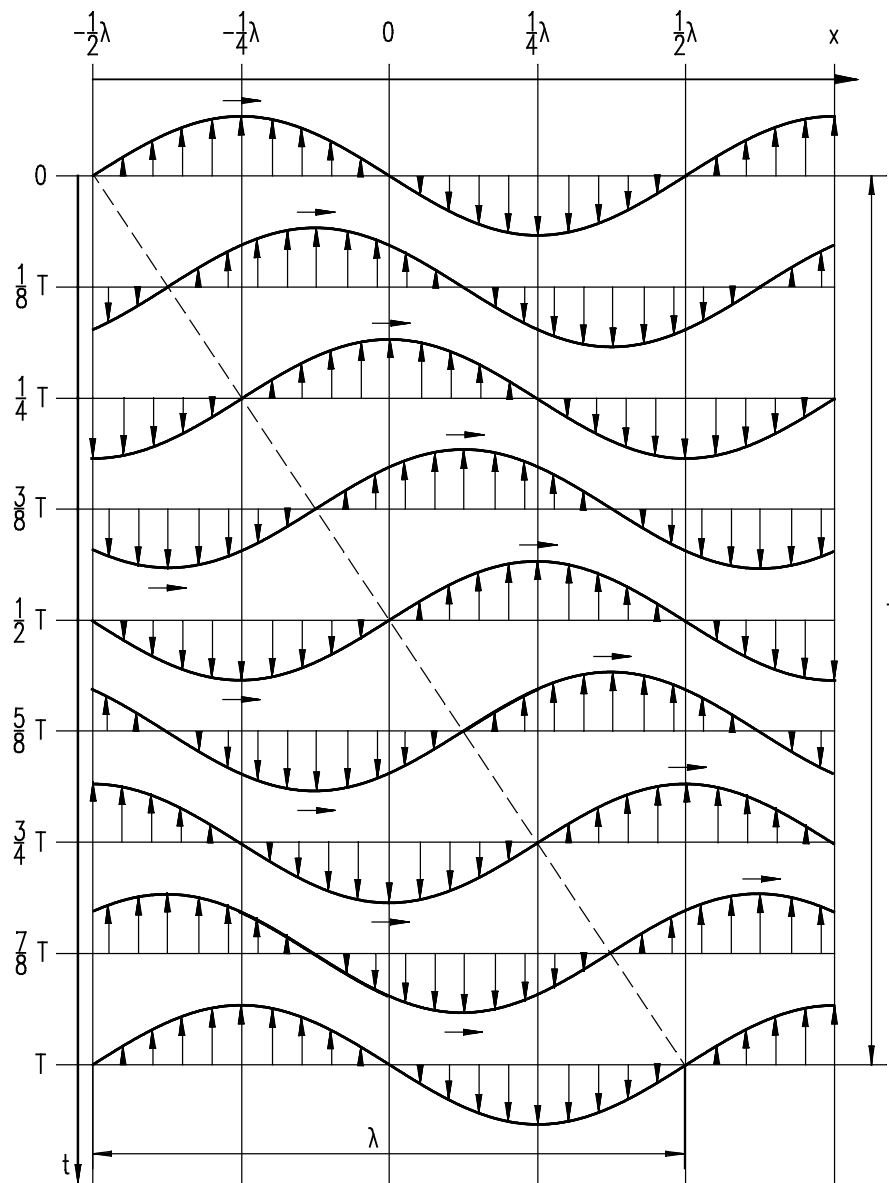


Abbildung 25 Zeitlicher und räumlicher Ablauf einer Wellenbewegung

Der zeitliche und räumliche Bewegungsablauf einer Wellenbewegung lässt sich gut erfassen und damit auch mathematisch beschreiben, wenn man zum einen den Schwingungsvorgang eines Pendels an einem bestimmten Ort, zum anderen die Phasenlage aller Oszillatoren zu einem bestimmten Zeitpunkt beobachtet.

Schwingungsdauer T

Es zeigt sich, dass sich an jedem Ort der Oszillatorkette gleiche Schwingungszustände nach einer zeitlichen Periode, der Schwingungsdauer T , wiederholen (Abbildung 25). Zudem ist der zeitliche Verlauf der Schwingung bei jedem Oszillator der Kette identisch mit dem eines Einzelnen, zu einer erzwungenen Schwingung angeregten Oszillators, es gilt:

Die zeitliche Periode einer Welle ist die Schwingungsdauer T .

Daher ergeben sich für die **Frequenz** und die **Kreisfrequenz** der Welle:

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{und} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$

Wellenlänge λ

Die benachbarten Oszillatoren einer Kette führen ihre erzwungenen Schwingungen mit einer konstanten Phasendifferenz $\Delta\varphi$ aus. Gleiche Schwingungszustände, die durch ihre Phasenlage gekennzeichnet sind, wandern daher über die Kette der Oszillatoren hinweg, und es kommt zu einer fortschreitenden Welle (Abbildung 25). Zu jedem Zeitpunkt wiederholen sich gleiche Phasen in gleichen Abständen, der Wellenlänge λ , und es gilt:

Die räumliche Periode einer Welle ist die Wellenlänge λ .

Die Wellenlänge λ ist somit bei einer Wellenbewegung der kürzeste Abstand zwischen zwei Oszillatoren gleicher Phase (Abbildung 25).

Phasengeschwindigkeit c_p

Bei einer Welle bewegen sich die Schwingungszustände, z.B. das positive Maximum der Auslenkung, mit einer bestimmten Geschwindigkeit, der Phasengeschwindigkeit, längs der Oszillatorkette. Ihre Definition lautet:

Die Phasengeschwindigkeit c_p ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Schwingungszustände bei einer Welle räumlich bewegen.

Die Phasengeschwindigkeit lässt sich durch folgende Überlegung sehr einfach bestimmen:

Während einer Schwingungsdauer T eines bestimmten Oszillators bewegt sich seine Phase räumlich um eine bestimmte Strecke bis zu einem bestimmten anderen Oszillator in x -Richtung.

Nach der Zeit T schwingen diese beiden Oszillatoren in Phase, sodass der von der Phase zurückgelegte Weg gleich der Wellenlänge λ ist. Für die Berechnung der Phasengeschwindigkeit c_p gilt:

$$c_p = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$$

Während der Schwingungsdauer T einer Welle wird somit von jeder Phase eine Strecke von der Länge der Wellenlänge λ in Ausbreitungsrichtung zurückgelegt.

Gleichung der fortschreitenden linearen Welle

Wird am Anfang einer Pendelkette der Oszillator im Punkt $P_0(x = 0)$ zur Zeit $t = 0$ zu einer Schwingung angeregt, so wird seine Bewegung mit der Schwingungsgleichung

$$y(0,t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

beschrieben. Die Schwingung breitet sich mit der Geschwindigkeit $c_p = \lambda \cdot f = \lambda/T$ über die Oszillatorkette aus und erreicht einen Punkt $P(x_1)$ nach der Zeit $t_1 = x_1/c_p$. Der Oszillator an diesem Punkt fängt also um die Zeit t_1 später an zu schwingen und seine Schwingungsgleichung lautet:

$$y(x_1,t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot (t - t_1))$$

Mit den Umformungen

$$t_1 = \frac{x_1}{c_p} = \frac{x_1 \cdot T}{\lambda}$$

und

$$\omega \cdot (t - t_1) = \frac{2\pi}{T} \cdot \left(t - \frac{x_1 \cdot T}{\lambda} \right) = 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right)$$

erhält man mit $x_1 = x$ die **Wellengleichung** der linearen Welle:

$$y(x,t) = \hat{y} \cdot \sin \left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right)$$

Die Wellengleichung gibt somit die Auslenkung $y(x, t)$ an der Stelle x einer linearen Oszillatorkette zur Zeit t an, die durch eine Welle mit der Geschwindigkeit c_p , der Periodendauer T und der Wellenlänge λ hervorgerufen wird.

Die Wellengleichung ist eine doppelt-periodische Funktion: Für einen festen Ort x ist die Periode die Schwingungsdauer T , für eine feste Zeit ist die Periode die Wellenlänge λ .

Die Wellengleichung gilt nicht nur für gekoppelte Oszillatoren, sondern für alle Größen, die sich wellenförmig ausbreiten (Schall, elektrische Wechselfelder, etc.).

Energietransport

Bei der fortschreitenden Welle werden die gekoppelten Oszillatoren nacheinander in Schwingungen versetzt. Durch diesen Impulsübergang wird Energie von Oszillator zu Oszillator transportiert. Die Energie wandert als Schwingungsenergie durch den Wellenträger, ohne dass Materie, abgesehen von der Bewegung der einzelnen Materieteilchen um die Ruhelage, bewegt wird.

Auf der Ausbreitung der Schwingungsenergie durch eine Welle beruht der Energietransport vieler Arten von Strahlung, z.B. Wärmestrahlung, ohne dass dazu Materie als Träger der Welle notwendig ist.

Dämpfung

Die Amplitude der einzelnen Oszillatoren ist bei einer Welle zeitlich konstant. Alle Oszillatoren führen erzwungene Schwingungen aus.

Die Amplitude der Schwingung nimmt jedoch mit zunehmenden Abstand von dem Ausgangspunkt der Erregung ab. Auf dem Weg der Energie durch den Wellenträger kommt es auf Grund der Kopplung zu Reibungsverlusten. Dies führt zu einer Abnahme der Schwingungsenergie und damit zu einer Reduzierung der Amplitude bei zunehmendem Weg x .

Ein maximaler Energietransport wird erreicht, wenn die Welle mit der Resonanzfrequenz der Oszillatoren erregt wird.

Transversalwellen und Longitudinalwellen

Je nach Schwingungsrichtung der Oszillatoren werden bei den Wellen zwei Arten unterschieden:

Ist die Schwingungsrichtung jedes einzelnen Oszillators senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle gerichtet, so spricht man von einer Querwelle oder Transversalwelle.

Sie besteht aus einer Abfolge von Wellenbergen und Wellentälern (Abbildung 26), deren Höhe die Amplitude \hat{y} der einzelnen Schwingungen ist.

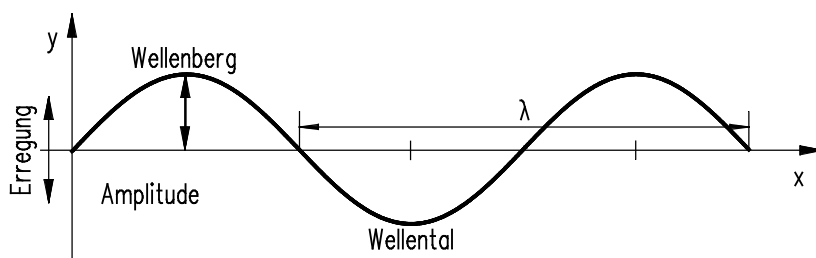


Abbildung 26 Wellenberg und Tal einer Transversal- oder Querwelle

Bei der Querwelle ist deutlich zwischen der Bewegung der einzelnen Oszillatoren und der Bewegung der Welle zu unterscheiden:

Die Teilchen bewegen sich um ihre Ruhelage und ihre Geschwindigkeit berechnet sich im Fall einer harmonischen Schwingung nach der Gleichung $v = \hat{y} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$.

Die Welle breitet sich mit der Phasengeschwindigkeit c_p längs des Wellenträgers aus.

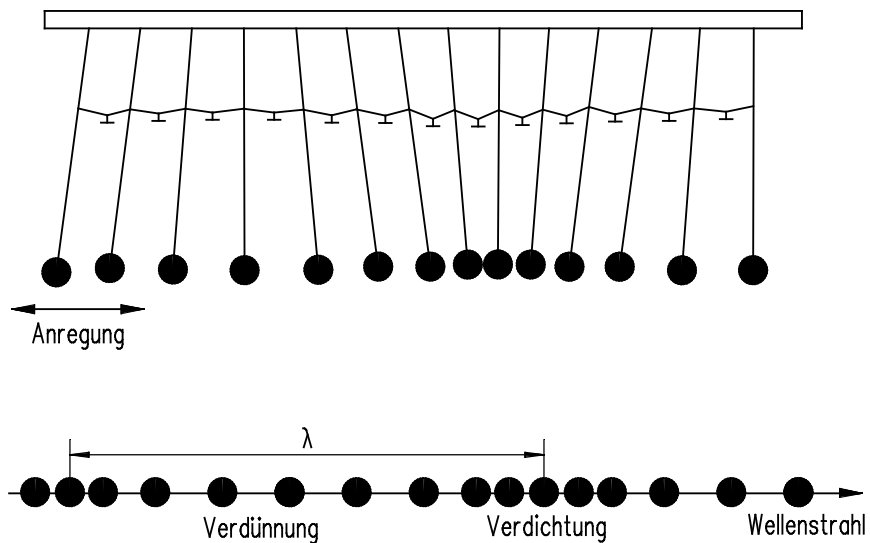


Abbildung 27 Verdichtungen und Verdünnungen bei einer linearen Oszillorkette

Wird eine Reihe gekoppelter Pendel parallel zur Pendelreihe angeregt, pflanzt sich diese Störung ebenfalls durch die Oszillorkette fort (Abbildung 27). Es entstehen Bereiche mit geringen Teilchenabständen, Verdichtungen, und Bereiche mit großen Teilchenabständen, Verdünnungen.

Ist die Schwingungsrichtung jedes einzelnen Oszillators parallel zur Ausbreitungsrichtung der Welle gerichtet, so spricht man von einer Längswelle oder Longitudinalwelle.

Zur Veranschaulichung und zur mathematischen Beschreibung einer Longitudinalwelle wird von der Momentaufnahme einer Transversalwelle ausgegangen (Abbildung 28a).

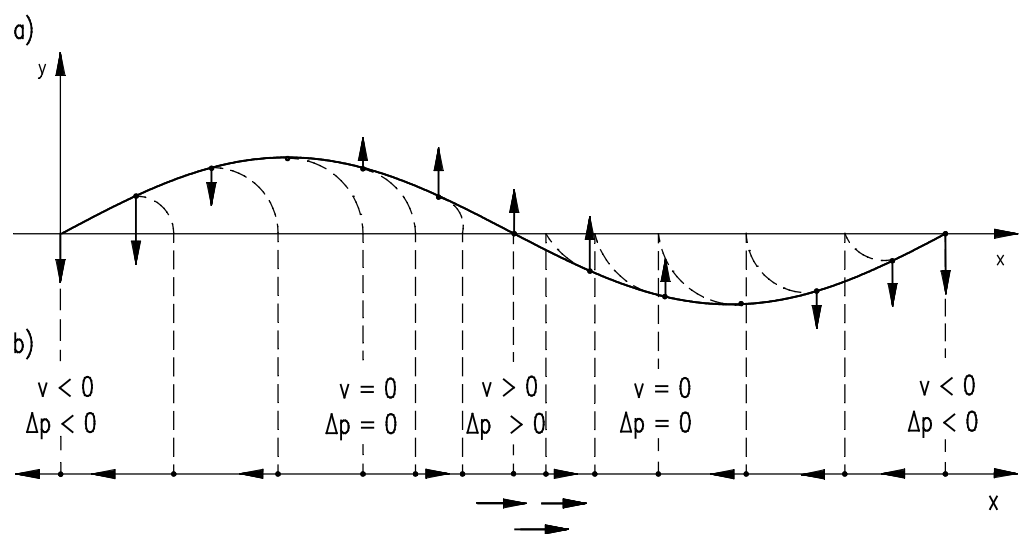


Abbildung 28 Vergleichende Darstellung von Transversal- und Longitudinalwelle

Klappt man die Auslenkungen der Oszillatoren entsprechend ihrer Richtung in die x-Achse, erhält man das Bild einer Longitudinalwelle. Deutlich sind auf dem Wellen-

träger die Bereiche mit größerer und geringerer Teilchendichte, sowie die Bewegungsrichtungen der Teilchen in und entgegengesetzt der Ausbreitungsrichtung zu erkennen (Abbildung 28b).

Die unterschiedlichen Teilchendichten können als **Druckschwankungen** gegenüber dem Normaldruck interpretiert werden. Stellt man die Bereiche mit größeren Druck als Wellenberg, die mit kleineren Druck als Wellental dar, ergibt sich eine **Druckwelle** (Abbildung 29).

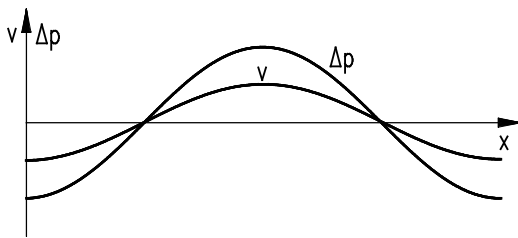


Abbildung 29 Druck- und Geschwindigkeitsverteilung einer fortschreitenden Longitudinalwelle

Stellt man die Geschwindigkeiten der einzelnen Oszillatoren dar, so erhält man die **Geschwindigkeitswelle** der Longitudinalwellen (Abbildung 29).

Wie bei der Querwelle muss auch bei der Längswelle zwischen der Geschwindigkeit der Oszillatoren und der Phasengeschwindigkeit der Welle unterschieden werden.

Eine Longitudinalwelle wird durch eine Druckwelle und eine Geschwindigkeitswelle beschrieben. Beide sind miteinander in Phase und haben die gleiche Wellenlänge und Phasengeschwindigkeit wie die Longitudinalwelle selbst.

Für das Entstehen von **mechanischen Transversalwellen** sind elastische Querkräfte notwendig. Diese sind z.B. in Festkörpern vorhanden. Im Inneren von Flüssigkeiten und in Gasen wirken keine Querkräfte, sodass in ihnen keine Querwellen entstehen können.

Mechanische Longitudinalwellen entstehen, wenn zwischen den einzelnen Oszillatoren elastische Längskräfte wirken, also Kräfte, die einer Volumenänderung entgegenwirken. Diese Kräfte existieren sowohl in Festkörpern als auch in Flüssigkeiten und Gasen.

Im Inneren von Flüssigkeiten und Gasen sind somit nur Longitudinalwellen möglich, während sich in Festkörpern Longitudinal- und Transversalwellen fortpflanzen können (Abbildung 30).

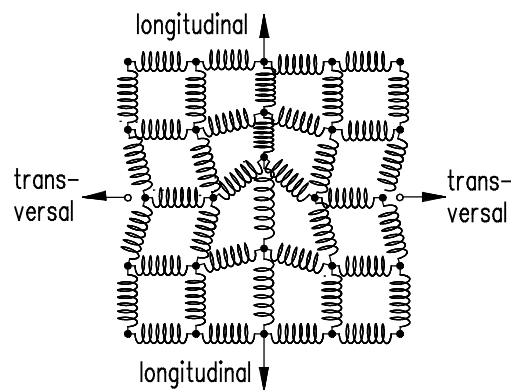


Abbildung 30 Gittermodell eines festen, elastischen Körpers und Ausbreitungsrichtungen von Longitudinal- und Transversalwellen bei einer Störung

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen ist abhängig von der Größe der Kräfte zwischen den Oszillatoren. Je stärker die Kopplung, desto höher die Geschwindigkeit. Aus der Mechanik ist bekannt, dass die Längskräfte bei gleicher Auslenkung größer sind als die Querkkräfte. Daher ist die Geschwindigkeit der Längswellen unter gleichen Bedingungen größer, als die der Querwellen.

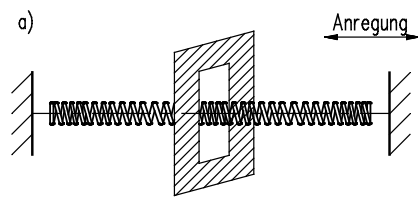
Das unterschiedliche Ausbreitungsverhalten von Longitudinal- und Transversalwellen wird z.B. bei den **seismischen Wellen** zur Bestimmung der Epizentren von Erdbeben, zur Untersuchung der Schalenstruktur der Erde oder zur Erkundung von Öl- und Gaslagerstätten genutzt.

Polarisation

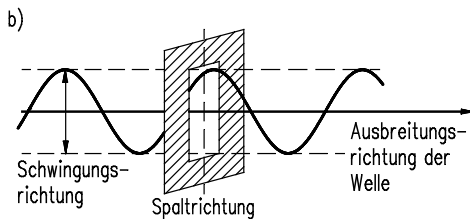
Bei den mechanischen Wellen kann in der Regel durch Beobachtung entschieden werden, ob eine Transversal- oder Longitudinalwelle vorliegt. Bei vielen anderen Wellen, z.B. den elektromagnetischen Wellen, ist dies nicht möglich.

Zur Unterscheidung beider Wellenarten kann das Phänomen der **Polarisierbarkeit** genutzt werden, dessen Eigenschaft an einem Modellversuch veranschaulicht werden kann:

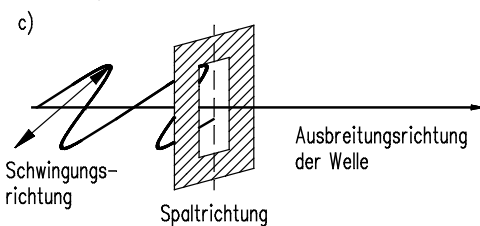
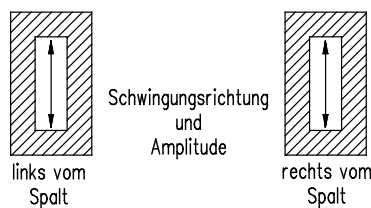
Eine Schraubenfeder wird durch einen Spalt geführt und an beiden Enden befestigt.



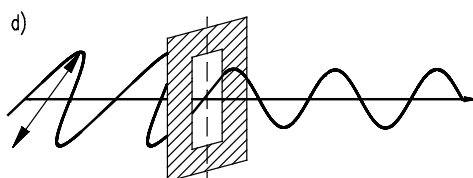
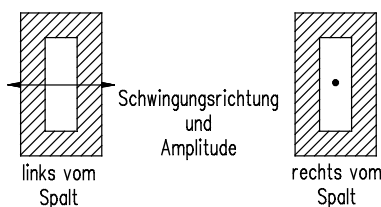
Während longitudinale Wellen den Spalt ungehindert passieren (Abbildung 31a), haben Querwellen hinter dem Spalt eine Schwingungsrichtung parallel zum Spalt oder werden teilweise gar nicht durchgelassen, es gilt:



Liegt die Schwingungsrichtung der einzelnen Oszillatoren in Richtung des Spaltes (Polarisationsachse), wird die Schwingung ungehindert durchgelassen (Abbildung 31b).



Verläuft die Schwingungsrichtung senkrecht zum Spalt, so ist die Welle hinter dem Spalt ausgelöscht (Abbildung 31c)



Bei allen anderen Winkeln zwischen Schwingungsrichtung und Spalt, wird nur die Komponente des Schwingungsvektors parallel zum Spalt durchgelassen, und die Schwingung hat eine geringere Amplitude (Abbildung 31d).

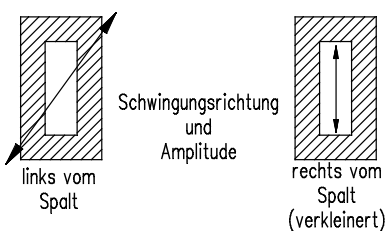


Abbildung 31 Polarisation von Wellen

Transversalwellen, deren Schwingungsvektoren in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung liegen heißen **linear polarisiert**.

Bei **Longitudinalwellen** kann **keine Polarisation** erzeugt oder nachgewiesen werden.

Eine Vorrichtung, die eine bestimmte Schwingungsrichtung aus einer Transversalwelle herausfiltert, heißt **Polarisator**.

Zudem gibt es Wellen, deren Schwingungsvektoren auf einer Kreisbahn oder auf einer Ellipse rotieren. Diese Wellen werden als zirkular oder elliptisch polarisierte Transversalwellen bezeichnet.

Zirkular polarisierte Wellen entstehen, wenn sich zwei linear polarisierte Wellen, deren Schwingungsebenen senkrecht aufeinander stehen, überlagern. Die Schwingungen haben die gleiche Frequenz und Amplitude, es besteht jedoch eine Phasendifferenz.

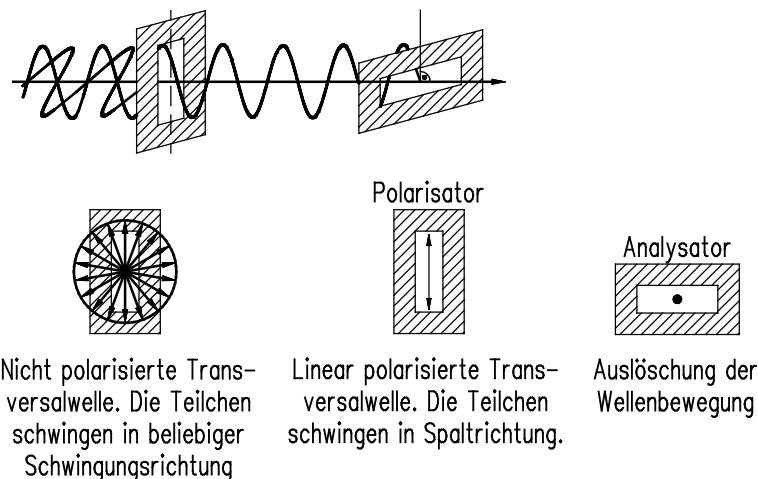


Abbildung 32 Zirkular polarisierte Welle

Elliptisch polarisierte Wellen entstehen, wenn sich zwei linear polarisierte Wellen, deren Schwingungsebenen senkrecht aufeinander stehen, überlagern. Die Schwingungen haben die gleiche Frequenz, es besteht jedoch eine Phasendifferenz und die Amplituden sind unterschiedlich groß.

Durchläuft eine zirkular oder elliptisch polarisierte Welle einen Polarisator, wird die Komponente der Schwingungsrichtungen parallel zur Polarisatorachse herausgefiltert, es entsteht hinter dem Polarisator eine linear polarisierte Welle (Abbildung 32).

Trifft diese linear polarisierte Welle auf einen weiteren Polarisator, dessen Polarisationsachse senkrecht zu der des ersten steht, so wird die Transversalwelle ausgelöscht (Abbildung 32). Longitudinalwellen passieren beide Polarisatoren ungehindert.

Der zweite Polarisator entscheidet über die Art der Welle und die Schwingungsrichtung und wird daher als **Analysator** bezeichnet.

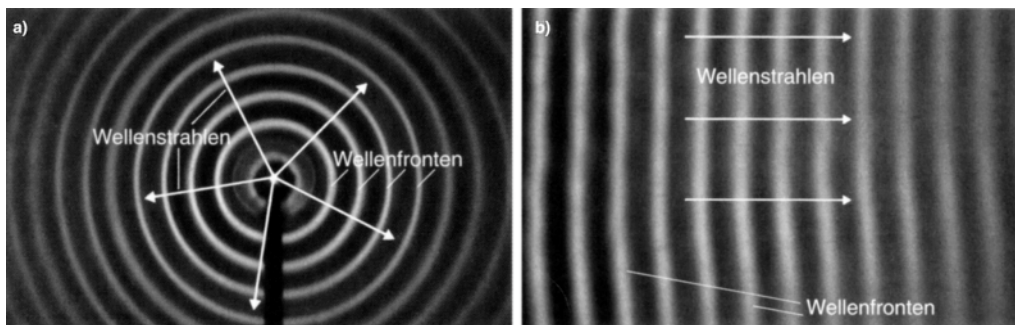
Die Polarisierbarkeit ist eine charakteristische Eigenschaft der Transversalwellen und es gilt:

Wird durch einen Polarisator und Analysator in gekreuzter Stellung eine Welle vollständig ausgelöscht, handelt es sich um eine Transversalwelle.

Polarisatoren und Analysatoren stehen heute nicht nur für mechanische, sondern für fast alle anderen Wellenarten zur Verfügung.

Zweidimensionale Wellen (Ebene Wellen)

Ein Beispiel für ebene Wellen sind die Oberflächenwellen des Wassers. Sie werden z.B. für experimentelle Untersuchungen durch einen periodisch in das Wasser einer Wellenwanne eintauchenden Erreger erzeugt. Das entstehende **Wellenfeld** kann durch eine Projektion auf einem Wandschirm betrachtet werden (Abbildung 33).



a) Kreiswelle

b) gerade Welle

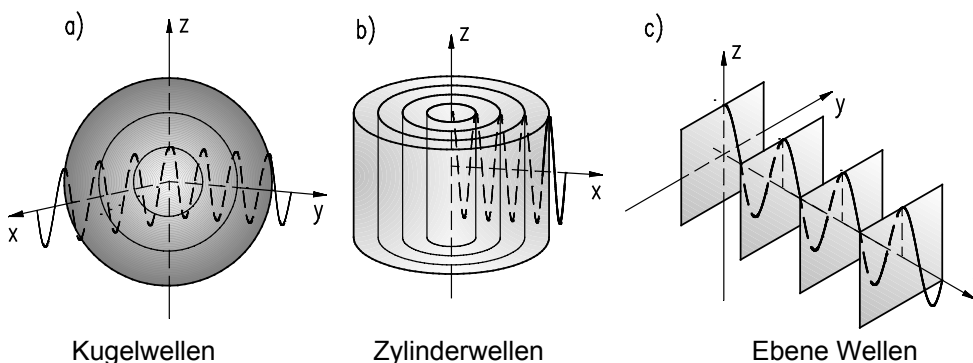
Abbildung 33 Formen ebener Wellen

Zwischen der Schwingung des Erregers und der erzwungenen Schwingung in einem Punkt des Wellenfeldes besteht eine Phasendifferenz. Alle benachbarten Punkte im gleichen Abstand vom Erreger schwingen in Phase und bilden eine **Wellenfront**.

Senkrecht zu den Wellenfronten verlaufen die **Wellennormalen** oder **Wellenstrahlen**, die die Ausbreitungsrichtung der Welle angeben (Abbildung 33).

Bei geraden Wellenfronten sind die Wellenstrahlen parallel zueinander (Abbildung 33b), bei kreisförmigen Wellenfronten verlaufen die Wellenstrahlen radial vom Zentrum aus (Abbildung 33a). In allen Fällen stehen die Wellenstrahlen immer senkrecht auf den Wellenfronten.

Dreidimensionale Wellen (Räumliche Wellen)



Kugelwellen

Zylinderwellen

Ebene Wellen

Abbildung 34 Räumliche Wellen

In Abbildung 34 sind die drei wichtigsten räumlichen Wellen schematisch dargestellt. Auch hier bilden benachbarte Punkte gleicher Phase wieder eine Wellenfront. Bei isotropen Medien (Medien, die in allen Richtungen die gleichen Eigenschaften aufwei-

sen) lassen sich die dreidimensionalen Wellen in der Regel durch zweidimensionale oder eindimensionale Schnitte mathematisch wie ebene oder lineare Wellen behandeln.

Überlagerung kohärenter Wellen

Die Überlagerung zweier Wellen ist ein in der Natur (z.B. an Wasserwellen) sehr häufig zu beobachtendes Phänomen. Abbildung 35 zeigt zwei Kreiswellen, die sich überlagern.

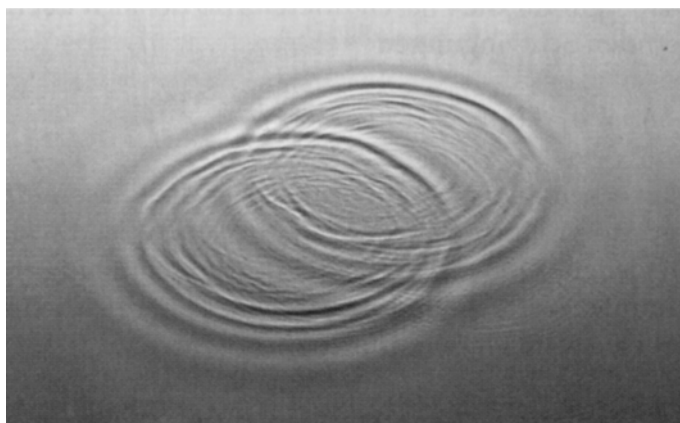


Abbildung 35 Überlagerung zweier Kreiswellen im Wasser

Deutlich ist zu erkennen, dass die Wellen sich teilweise durchdringen, ohne sich gegenseitig zu stören. Sie laufen übereinander hinweg, ohne ihre Form zu verändern.

Dieses Prinzip der ungestörten Überlagerung wird bei Wellen gleicher Frequenz und gleicher Wellenlänge als **Interferenz** bezeichnet:

Treffen an einem Ort eines Wellenträgers zwei Wellen aufeinander, addieren sich die Elongationen der Schwingungen. Nach dem Zusammentreffen laufen die Wellen ungestört weiter.

Die Größe der Elongation bei der Überlagerung zweier Wellen gleicher Frequenz ist in jedem Punkt P abhängig von der Phasendifferenz $\Delta\varphi$ der sich überlagernden Schwingungen. Diese lässt sich aus der **Wegdifferenz** oder dem **Gangunterschied** Δs an einem bestimmten Ort

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

bestimmen. Hierbei sind s_1 und s_2 die Abstände des Punktes P von den beiden Erregern 1 und 2 mit $s_2 > s_1$.

Die Phasendifferenz der Schwingung einer Welle in einem Abstand λ von dem Erregzentrum ist 2π . Damit folgt für die Schwingung der ersten Welle am Punkt P der Phasenunterschied $\varphi_1 = (s_1/\lambda) \cdot 2\pi$, für die zweite Welle $\varphi_2 = (s_2/\lambda) \cdot 2\pi$. Damit ergibt sich für die Phasendifferenz $\Delta\varphi$ der sich überlagernden Schwingungen:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{s_2 - s_1}{\lambda} \cdot 2\pi = \frac{\Delta s}{\lambda} \cdot 2\pi$$

Für jeden Punkt eines Wellenfeldes sind die Strecken s_1 und s_2 eindeutig bestimmt, womit auch die Phasendifferenz der sich überlagernden Schwingungen an jedem Punkt konstant ist. In der Zeigerdarstellung rotieren somit die Zeiger der beiden Schwingungen mit gleicher Winkelgeschwindigkeit und einem festen Winkel $\Delta\varphi$.

Erzeugt man in einer Wellenwanne mit zwei punktförmigen Erregern zwei Wellenfelder gleicher Frequenz und (annähernd) gleicher Amplitude, ergibt sich das in Abbildung 36 dargestellte Bild für die Überlagerung oder Interferenz.

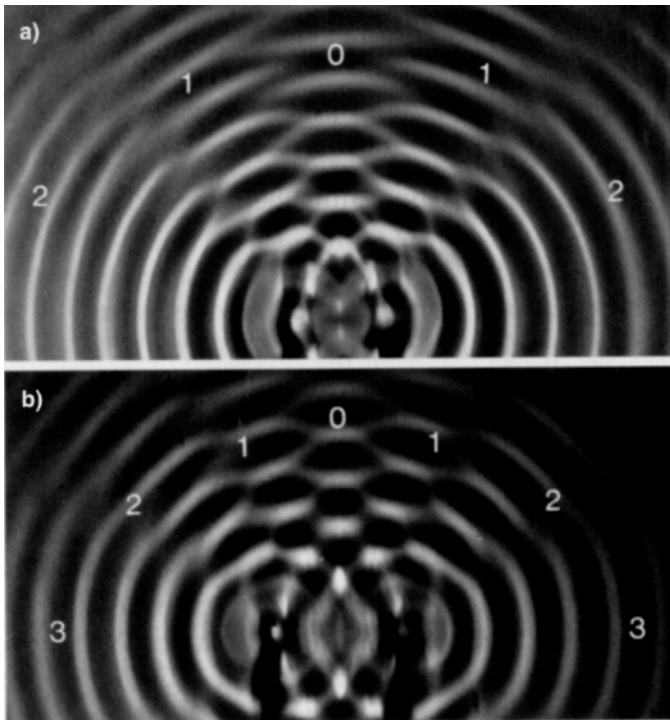


Abbildung 36 Interferenz zweier Kreiswellensysteme

In dem Wellenfeld sind Linien zu erkennen, in denen die Wellenbewegung (annähernd) zur Ruhe kommt, und Linien bei denen die Wellenbewegung besonders stark ist. Dieses Phänomen kann mit der ortsabhängigen Phasendifferenz erklärt werden:

An Orten mit einer Phasendifferenz von 2π und den Vielfachen von 2π zeigen die Zeiger der beiden Schwingungen in die gleiche Richtung und man erhält **maximale Verstärkung** oder **konstruktive Interferenz**:

$$\Delta\varphi = n \cdot 2\pi,$$

oder entsprechend für den Gangunterschied

$$\Delta s = n \cdot \lambda$$

mit $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Bei ungeradzahligen Vielfachen von π haben die Zeiger entgegengesetzte Richtungen und es ergibt sich **maximale Abschwächung** oder **destruktive Interferenz**:

$$\Delta\varphi = (2n - 1) \cdot \pi$$

oder entsprechend für den Gangunterschied

$$\Delta s = (2n - 1) \cdot \lambda/2$$

mit $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

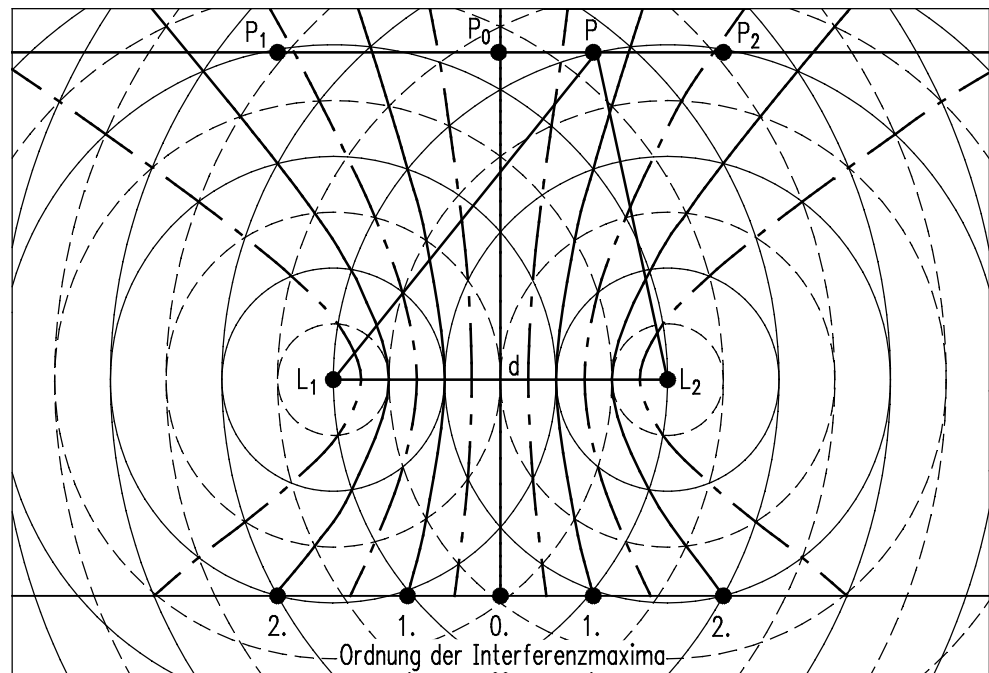


Abbildung 37 Interferenzhyperbeln bei zwei kreisförmigen Wellenfeldern

Die Maxima und Minima der Interferenz liegen auf Kurven, bei denen die Phasendifferenz, und damit auch der Gangunterschied, konstant sind. Diese Kurven sind konfokale (konfokal: mit gleichen Brennpunkten) Hyperbeln mit den Erregerzentren als Brennpunkte. In Abbildung 37 sind die Interferenzhyperbeln im Wellenfeld zweier Kreiswellensystem schematisch dargestellt.

Der Laufindex n gibt die Ordnung der Interferenz an. So liegt z.B. das **Interferenzmaximum 0. Ordnung** mit dem Phasenunterschied $\Delta\varphi = 0$ und dem Gangunterschied $\Delta s = 0$ auf der Symmetrieachse zwischen den beiden Erregerzentren (Abbildung 37).

Energieverteilung im Interferenzfeld

Die beiden Erreger L_1 und L_2 erzeugen auf der Linie P_1P_2 , bei Vernachlässigung der Dämpfung, Schwingungen mit der Amplitude \hat{y} . Zu jedem Punkt P auf der Geraden wird somit von jedem Erreger eine Energiemenge $E \sim \hat{y}^2$ transportiert. Ohne Interferenz ergibt dies für jeden Punkt eine Energie von $E \sim 2 \cdot \hat{y}^2$.

Auf Grund der Interferenz ist jedoch die Amplitude an den Schnittpunkten der Geraden P_1P_2 mit den Hyperbeln der Interferenzminima gleich Null (Abbildung 37). Damit ist auch die Schwingungsenergie in diesen Punkten Null.

An den Schnittpunkten der Geraden mit den Hyperbeln der Interferenzmaxima hat die Amplitude den Wert \hat{y}^2 . Somit gilt für die Energie $E \sim (2 \cdot \hat{y})^2 = 4 \cdot \hat{y}^2$.

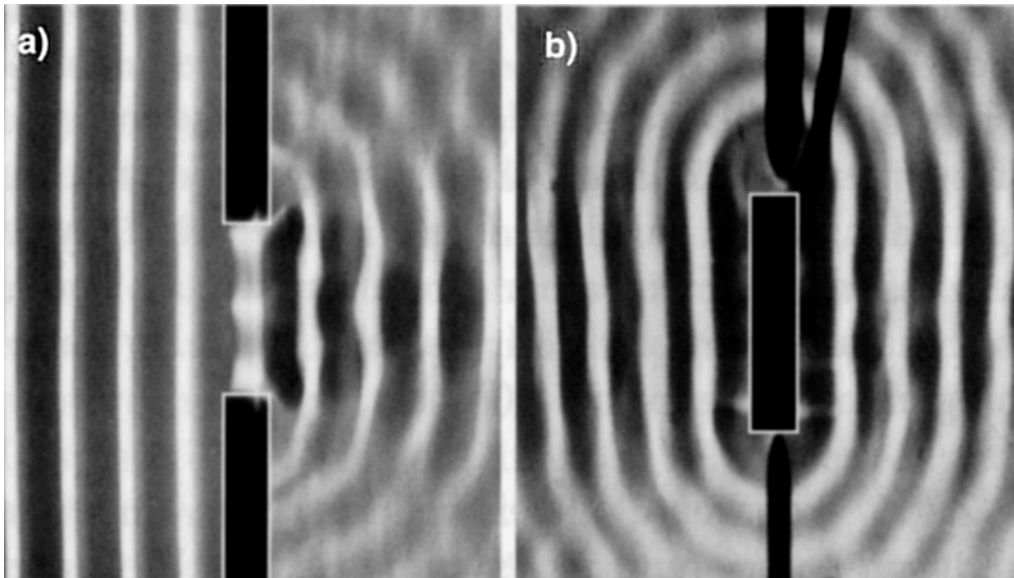
Zu bestimmten Punkten des Wellenfeldes wird somit die Energie $E = 0$ transportiert, zu anderen die Energie $E \sim 4 \cdot \hat{y}^2$. Eine Summation der Energie längs der Linie ergibt jedoch wieder eine mittlere Energie von $E \sim 2 \cdot \hat{y}^2$.

Hieraus folgt die folgende Welleneigenschaft:

Bei der Überlagerung zweier Wellen addieren sich die Amplituden der Schwingungen, nicht jedoch die Energien. Die Energien werden auf Grund der Interferenz anders verteilt.

Dieses Verhalten bietet der Physik die Möglichkeit zu entscheiden, ob eine Energieübertragung durch Materietransport oder durch Wellen erfolgt.

Huygens'sche Prinzip



a) hinter einer Öffnung
Abbildung 38 Wellenfelder

b) hinter einem gleich breiten Erreger

Beobachtet man eine gerade Welle, die auf eine breite Öffnung zuläuft, so entsteht hinter der Öffnung ein Streifen gerader Wellen (Abbildung 38a). Erzeugt man Wellen durch einem Erreger mit derselben Breite wie die Öffnung, so erhält man ein nahezu identisches Wellenmuster (Abbildung 38b). Diese und ähnliche Beobachtungen führten im 17. Jahrhundert zu der zuerst von Christian Huygens (1629 - 1695) formulierten Theorie der **Elementarwellen**, die auch heute noch die Grundlage der Wellentheorie darstellt.

Huygens'sche Prinzip

Jeder Punkt einer Wellenfront ist Ausgangspunkt von kreisförmigen (kugelförmigen) Elementarwellen, die sich mit gleicher Phasengeschwindigkeit und Frequenz wie die ursprüngliche Welle ausbreiten. Die Einhüllende aller Elementarwellen ergibt die neue Wellenfront.

Die neue Wellenfront entsteht durch die Interferenz der Elementarwellen in jedem beliebigen Punkt, wobei sich die Elongationen unter der Berücksichtigung der Phasenlagen addieren. In Abbildung 39 sind einige Beispiele für das Huygens'sche Prinzip exemplarisch dargestellt.

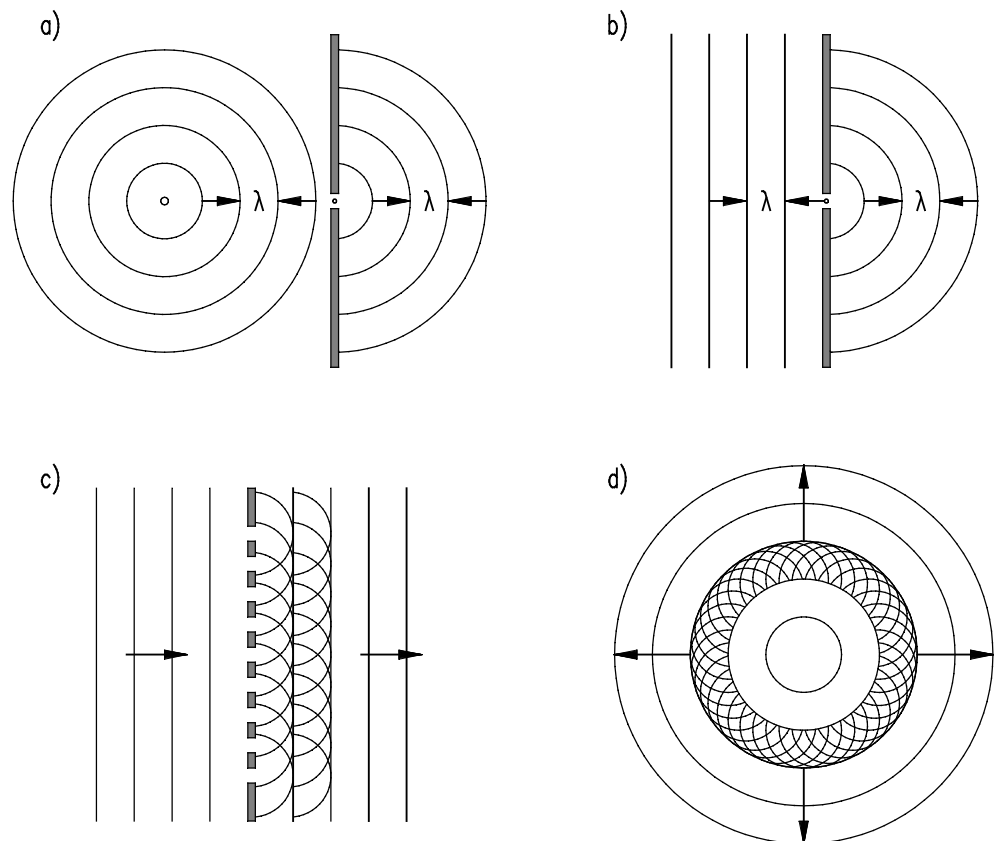


Abbildung 39 Huygens'sche Prinzip

Läuft eine Welle auf ein festes Hindernis mit einer schmalen Öffnung zu, so entsteht hinter dem Hindernis eine kreisförmige Elementarwelle, unabhängig davon, ob eine kreisförmige oder eine gerade Welle auf die Öffnung trifft (Abbildung 39a und b).

Läuft eine gerade Welle auf ein Hindernis mit vielen kleinen Öffnungen, so überlagern sich die Elementarwellen hinter den Öffnungen zu einer neuen linearen Welle (Abbildung 39c).

Die von einer kreisförmigen Wellenfront ausgehenden Elementarwellen setzen sich wieder zu einer kreisförmigen Wellenfront zusammen (Abbildung 39d).

Reflexion ebener Wellen

Beobachtet man die Reflexion einer ebenen Welle an einem festen Hindernis in einer Wellenwanne unter stroboskopischer Beleuchtung, so ist Folgendes zu erkennen:

Die reflektierte Welle hat die gleiche Wellenlänge und Frequenz, und damit auch die gleiche Phasengeschwindigkeit, wie die einfallende Welle. Bestimmt man die Winkel von ankommender und reflektierter Welle zum Einfallslot, so ergibt sich das aus der Optik bekannte **Reflexionsgesetz**:

Einfallswinkel α = Ausfallswinkel β

Eine Erklärung für dieses Gesetz liefert das Huygens'sche Prinzip (Abbildung 40).

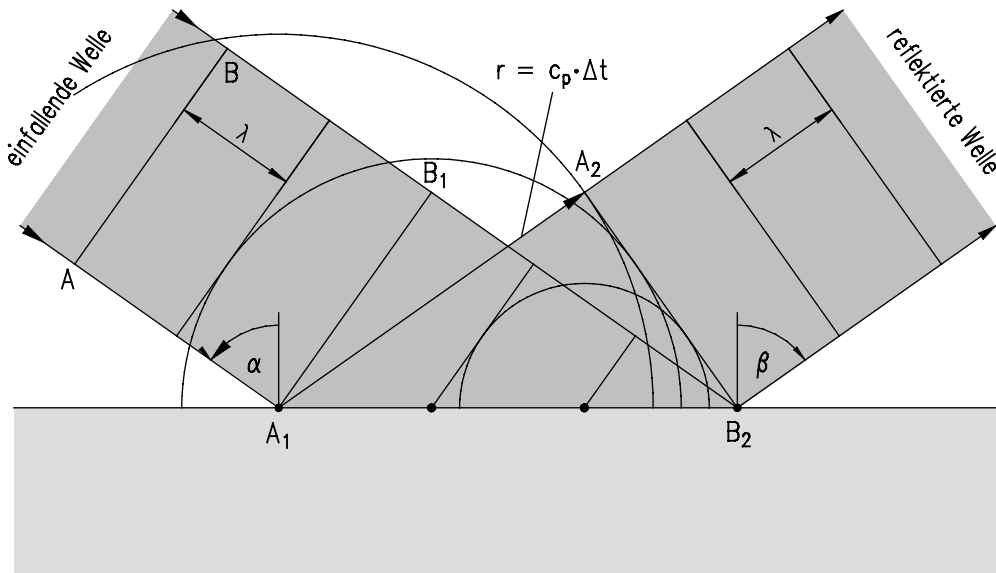


Abbildung 40 Erklärung des Reflexionsgesetzes

Die ebene Wellenfront \overline{AB} trifft im Punkt A_1 auf die reflektierende Fläche. Nach der Zeit Δt hat die Welle des Punktes B_1 die Strecke $\overline{B_1B_2} = c_p \cdot \Delta t$ durchlaufen und trifft ebenfalls auf die Wand. Vom Punkt A_1 breitet sich eine Elementarwelle mit der gleichen Phasengeschwindigkeit aus, die nach der Zeit Δt einen Radius von $r = c_p \cdot \Delta t = \overline{A_1A_2}$ hat. Die Tangente vom Punkt B_2 an diesen Kreis ergibt die einhüllende der von A_1 und B_2 ausgehenden Elementarwellen und damit die reflektierte Wellenfront $\overline{A_2B_2}$.

Aus der Kongruenz der Dreiecke $A_1A_2B_2$ und $A_1B_1B_2$ folgt sofort die Gleichheit der Winkel $\alpha = \beta$ und damit das genannte Reflexionsgesetz.

Brechungsgesetz

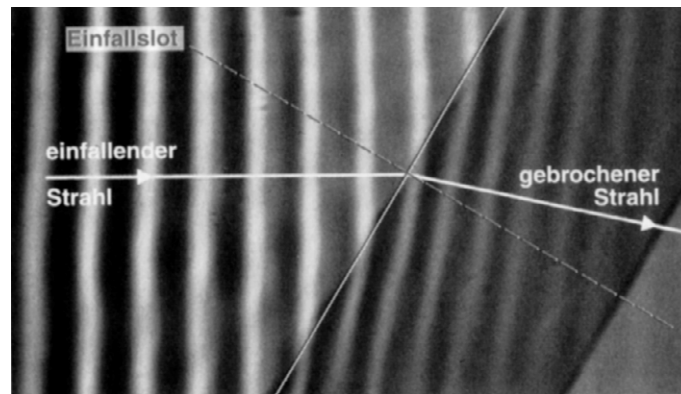


Abbildung 41 Brechung einer ebenen Welle

Läuft eine ebene Welle auf eine nur dünn mit Wasser bedeckte Glasplatte, so sind die Wellenfronten über der Glasplatte nicht mehr parallel zu denen der ankommenden Welle. Die Wellennormalen zeigen in verschiedene Richtungen, die Welle ist gebrochen (Abbildung 41).

Betrachtet man das Wellenfeld unter stroboskopischer Beleuchtung, so wird deutlich, dass die Frequenz der beiden Wellen gleich ist. Die Wellenlänge der gebrochenen Welle, und damit auch die Phasengeschwindigkeit, ist für die Welle im flachen Wasser kleiner als im tiefen. Generell gilt:

Die Frequenz einer Welle ist konstant. Wellenlänge und Phasengeschwindigkeit einer Welle ändern sich in Abhängigkeit von der Beschaffenheit des Wellenträgers.

Eine Erklärung für das Verhalten liefert wieder das Huygens'sche Prinzip (Abbildung 42).

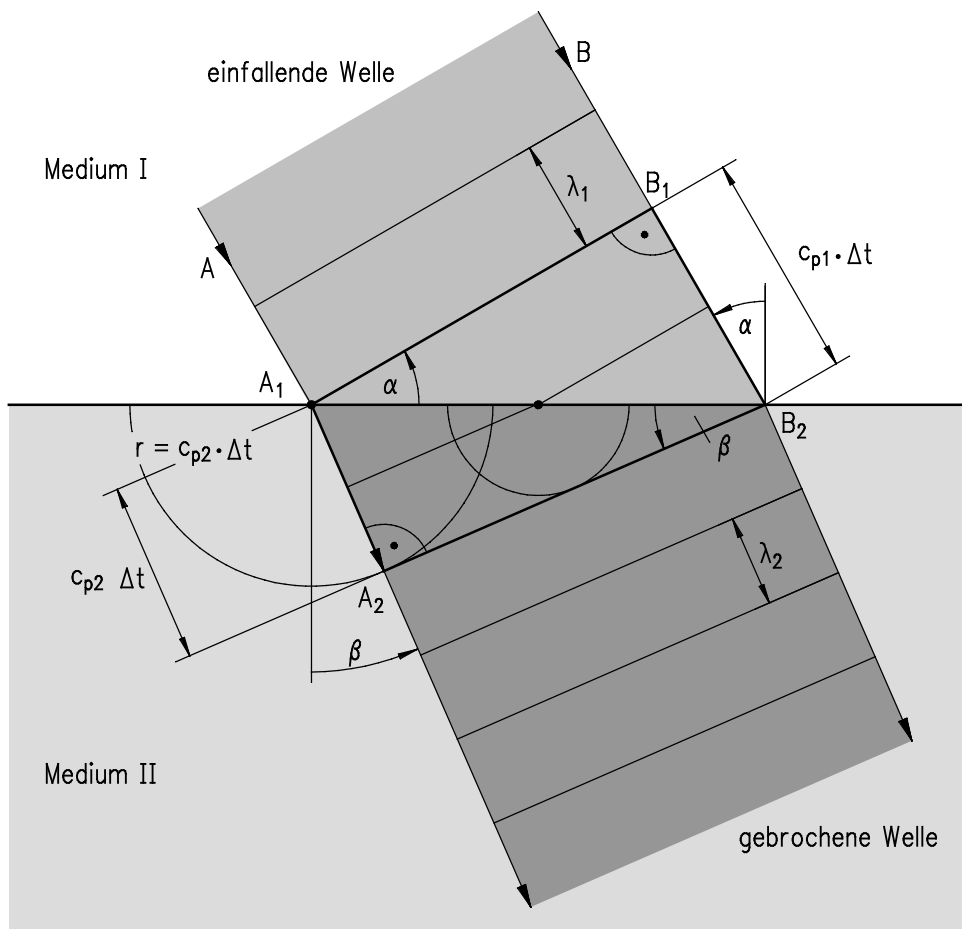


Abbildung 42 Erklärung des Brechungsgesetzes

Die ebene Wellenfront \overline{AB} trifft im Punkt A_1 auf die Grenzlinie zwischen flachen und tiefem Wasser. Nach der Zeit Δt hat die Welle des Punktes B_1 die Strecke $\overline{B_1B_2} = c_{p1} \cdot \Delta t$ durchlaufen und trifft ebenfalls auf die Grenzlinie. Vom Punkt A_1 breitet sich eine Elementarwelle mit der Phasengeschwindigkeit c_{p2} aus, die in der Zeit Δt den Radius $r = c_{p2} \cdot \Delta t = \overline{A_1A_2}$ hat. Die Tangente vom Punkt B_2 an diesen Kreis ergibt die einhüllende der von A_1 und B_2 ausgehenden Elementarwellen und damit die Wellenfront $\overline{A_2B_2}$ der gebrochenen Welle.

Für den Einfallswinkel α und den Ausfallwinkel β folgt aus den Dreiecken $A_1A_2B_2$ und $A_1B_1B_2$:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{A_1B_2}}}{\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1B_2}}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{c_{p1} \cdot \Delta t}{c_{p2} \cdot \Delta t} = \frac{c_{p1}}{c_{p2}}$$

Diese Gleichung gilt für jeden Einfallswinkel und man erhält das **Brechungsgesetz für Wellen**:

Treten Wellen von einem Medium in ein anderes über, ändert sich die Richtung der Wellennormalen und für den Einfall- und den Ausfallwinkel gilt:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_{p1}}{c_{p2}} = \text{konstant}$$

Auf Grund der Brechung schwenken z.B. Wasserwellen im flachem Wasser ein, und laufen auch bei unterschiedlichen Windrichtungen immer fast senkrecht auf den Strand auf.

Beugung von Wellen

Unter Beugung von Wellen versteht man das Eindringen der Wellen in den geometrischen Schattenraum von Hindernissen (Abbildung 43).

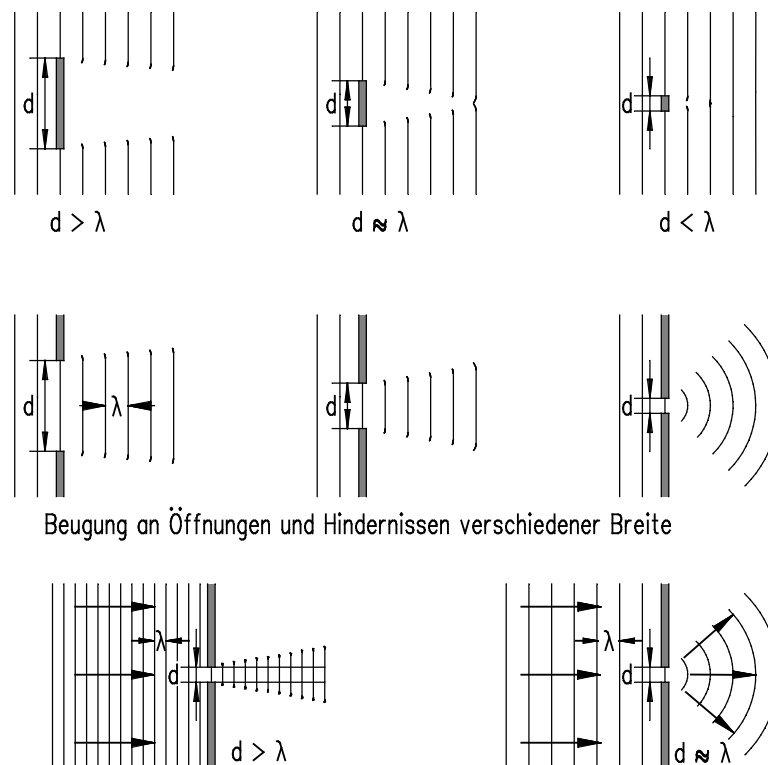


Abbildung 43 Beugung von Wellen

Aus den in Abbildung 43 dargestellten Beispielen wird deutlich, dass die Stärke der Beugung abhängig ist vom Verhältnis der Größe des Hindernisses zur Wellenlänge. Die Beugung wird besonders stark, wenn das Hindernis in der Größenordnung der Wellenlänge oder kleiner ist.

Auch dieses Verhalten kann durch das Huygens'sche Prinzip erklärt werden. Für die Entstehung der neuen Wellenfront fehlen durch das Hindernis Elementarwellen der ursprünglichen Welle, sodass an den Kanten des Hindernisses kreisförmige Wellen übrig bleiben.

Die Ausbreitung einer Welle unterscheidet sich dadurch deutlich von der Ausbreitung eines Teilchenstrahles, der nicht in den Schattenraum eines Hindernisses eintritt.

Sind die Abmessungen der Hindernisse sehr klein gegenüber der Wellenlänge, sind diese Hindernisse Ausgangszentren für Elementarwellen, die sich ungestört in alle Richtungen ausbreiten, und man spricht von **Streuung**.

So wird ein z.B. die Ausbreitung eines Lichtbündels durch Streuung an Staubpartikeln sichtbar, oder das Licht von Scheinwerfern durch Streuung an den Wassertropfen des Nebels.

Stehende Wellen

Spannt man eine Schraubenfeder oder ein Gummiseil zwischen zwei Befestigungen und erregt es periodisch, so kommt es bei bestimmten Erregerfrequenzen zu stationären Schwingungszuständen oder stehenden Wellen (Abbildung 44).

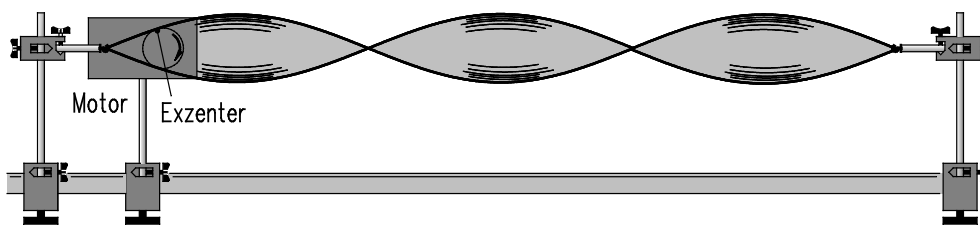


Abbildung 44 Stehende Welle auf einem Gummiseil

Man erkennt auf dem Wellenträger **Schwingungsknoten**, bei denen die Amplitude immer Null ist. Zwischen diesen Knoten schwingen die Oszillatoren mit gleicher Phase und Frequenz, jedoch unterschiedlicher Amplitude. In der Mitte zwischen den Knoten liegen die **Schwingungsbäuche**, in denen die Oszillatoren immer mit maximaler Amplitude schwingen.

Eine stehende Welle entsteht durch die Überlagerung zweier Wellen gleicher Frequenz und Amplitude, die sich in entgegengesetzter Richtung ausbreiten.

Die Wellenlänge λ der stehenden Welle ist der doppelte Abstand zweier benachbarter Knoten.

Bei unendlich langen Wellenträgern führt die Überlagerung gegenläufiger Wellen gleicher Frequenz und Amplitude immer zu einer stehenden Welle.

Bei endlich langen Wellenträgern kommt es nur bei bestimmten Frequenzen zu stehenden Wellen. Eine stehende Welle kann nur entstehen, wenn sich die auf Grund der Reflexion zwischen den Enden des Wellenträgers hin und her laufenden Wellen gleichsinnig überlagern. Man spricht dann auch, anstatt von stehenden Wellen, von **Eigenschwingungen des Systems**.

Die Form der Eigenschwingungen bei endlichen Wellenträgern ist bei den Transversalwellen davon abhängig, ob die Enden des Trägers frei schwingen können, oder fest sind. An freien Enden werden die Wellen ohne Phasensprung reflektiert, ein Wellenberg kehrt als Wellenberg zurück. Bei festem Ende findet bei der Reflexion ein Phasensprung von $\Delta\varphi = \pi$ statt, und ein Wellenberg wird als Wellental reflektiert.

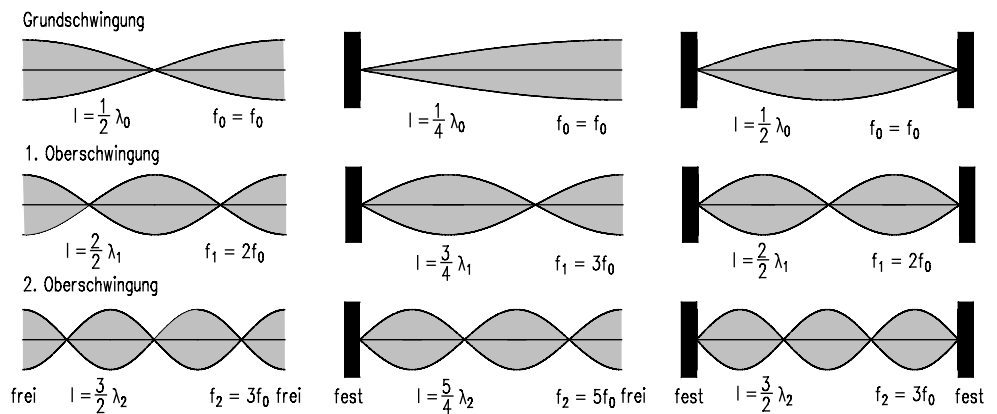


Abbildung 45 Eigenschwingungen eines Wellenträgers bei unterschiedlicher Einspannung der Enden

In Abbildung 45 zeigt die Eigenschwingung endlicher Wellenträger, deren Enden verschieden eingespannt sind. Für die Wellenlänge der stehenden Wellen gilt mit $n = 0, 1, 2, 3, \dots$:

Für gleich eingespannte Enden: $\lambda_n = 2l/(n + 1)$,

Für verschieden eingespannte Enden: $\lambda_n = 4l/(2n + 1)$.

Die einfachste Form der Eigenschwingung mit $n = 0$ heißt **Grundschiwingung**, die stehenden Wellen mit $n \neq 0$ heißen **n-te Oberschiwingung**.

Die Frequenzen der Grundschiwingung und der Oberschwingungen lassen sich aus der Beziehung $c_p = \lambda_n \cdot f_n$ berechnen.

Stehende Wellen treten in allen Bereichen der Physik auf. So werden Ton und Klang von Musikinstrumenten durch Eigenschwingungen von Seiten, Platten, Membranen oder Luftsäulen erzeugt, oder Atome und Kerne als zu Eigenschwingungen fähige Systeme betrachtet.

Aufgaben

Aufgabe 1

Erklären Sie den Begriff lineare, fortschreitende Welle!

Aufgabe 2

Erklären Sie den Begriff Phasengeschwindigkeit und nennen Sie die formale Berechnung!

Aufgabe 3

Welche Aussage kann man aus der Wellengleichung gewinnen?

Aufgabe 4

Eine Welle mit der Amplitude 3 cm und der Wellenlänge 10 cm hat eine Frequenz von 1000 Hz.

4.1 Zeichnen Sie für die Zeiten $t = 0$ und $t = T/2$ das Momentanbild der Welle!

4.2 Bestimmen sie die Auslenkung am Ort $x = 4$ cm zurzeit $t = 2$ s!

Aufgabe 5

Geben Sie die Definition einer Transversal- und einer Longitudinalwelle an!

Aufgabe 6

Erklären Sie in Worten den Begriff Polarisator!

Aufgabe 7

Beschreiben Sie, wie man generell Transversalwellen von Longitudinalwellen unterscheiden kann!

Aufgabe 8

Erklären Sie den Begriff Interferenz!

Aufgabe 9

Erklären Sie den Begriff destruktive Interferenz und geben Sie die Interferenzbedingungen an!

Aufgabe 10

Erklären Sie mit eigenen Worten das Huygens'sche Prinzip!

Aufgabe 11

Erklären Sie in Worten und Formeln das Brechungsgesetz für Wellen!

Aufgabe 12

Was versteht man unter Beugung einer Welle?

Aufgabe 13

Beschreiben Sie den Begriff stehende Welle!

Aufgabe 14

Was versteht man unter Eigenschwingungen?

Lernbereich

3 Schall

Historisch bezeichnete man alle Wellen, die vom menschlichen Ohr wahrgenommen werden können, als Schall oder Schallwellen.

Heute ist **Schall ein Oberbegriff für mechanische Schwingungen und Wellen in elastisch verformbaren Medien**, und es gilt:

Die Ausbreitung der Schallwellen ist an ein Trägermaterial gebunden, im Vakuum ist keine Schallausbreitung möglich.

Das Teilgebiet der Physik, das sich mit den Eigenschaften wie Erzeugung, Ausbreitung und Empfang dieser Wellen beschäftigt, heißt **Akustik**.

Schallquellen

Als Schallquelle bezeichnet man ein schwingendes System, das Energie an seine Umgebung - in der Regel Luft - abgibt, und diese zu erzwungenen Schwingungen anregt.

Die bekanntesten Schallquellen kommen aus dem Bereich der Musik:

- schwingende Saiten bei Klavier, Gitarre, Geige
- schwingende Stäbe bei der Stimmgabel
- schwingende Platten beim Xylofon
- schwingende Membrane bei Lautsprecher und Trommel
- schwingende Luftsäulen bei Flöte, Trompete, Klarinette

Neben diesen „musischen“ Schallquellen sind jedoch auch die Schallemissionen von laufenden Maschinen und Fahrzeugen im täglichen Leben häufig anzutreffen.

Auch der Kehlkopf des Menschen ist als Schallquelle zu betrachten.

Einteilung des Schalls nach dem Trägermedium

Nach der Art des Trägermaterials unterscheidet man **Luftschall** in gasförmigen Medien, **Flüssigkeitsschall** in Flüssigkeiten und **Körperschall** in festen Körpern.

Einteilung des Schalls nach der Schwingungsfrequenz

Die **Frequenz f** der Schallwelle ist, wie bei allen Wellen, konstant und wird von Umgebungsbedingungen nicht beeinflusst. Sie ist unabhängig von der Art des Trägermediums und wird nur von der Schwingungsfrequenz des Erregers bestimmt. Sie wird daher genutzt, den weiten Bereich der Schallwellen zu unterteilen.

Schallwellen mit Frequenzen zwischen **0 Hz und 16 Hz** werden als **Infraschall** bezeichnet. Zum Infraschall gehören z.B. Erschütterungen durch den Verkehr, Gebäudeschwingungen oder niederfrequente Vibrationen.

Hörschall ist das für den Menschen hörbare Frequenzspektrum des Schalls. Er umfasst Frequenzen von **16 Hz bis 20 kHz**, wobei die obere Grenze u. a. eine Frage des Lebensalters ist.

Der **Ultraschall** umfasst Frequenzen oberhalb **20 kHz bis etwa 1 GHz**. Er wird z.B. für medizinische und werkstoffkundliche Untersuchungen genutzt.

Schall mit Frequenzen **größer als 1 GHz** wird als **Hyperschall** bezeichnet. Die Obergrenze für die Frequenzen mechanischer Schwingungen liegt bei ca. **20 kHz**.

Schallausbreitung

In Flüssigkeiten und Gasen breiten sich die Schallwellen, entsprechend der allgemeinen Wellentheorie, nur als longitudinale Wellen aus. In festen Körpern liegt der Schall als Longitudinal- und Transversalwelle vor, zudem sind Torsions- und BiegeWellen möglich.

In Flüssigkeiten und Gasen breitet sich der Schall bei punktförmigen Erregern als Kugelwelle aus. Es sind jedoch auch, je nach Form und insbesondere Größe der Schallquelle, andere Wellenformen möglich. Der Raum, der von einer Schallwelle erfasst wird, bezeichnet man mit **Schallfeld**.

Schallgeschwindigkeit c

Wie bei Wellen allgemein, ist auch bei den Schallwellen zwischen der Geschwindigkeit mit der die einzelnen Oszillatoren des Trägermediums schwingen, der Schallschnelle, und der Phasengeschwindigkeit der Schallwelle zu unterscheiden. Für Anwendungen in der Akustik ist die **Phasengeschwindigkeit der Schallwelle**, oder kurz die **Schallgeschwindigkeit c** , von wesentlicher Bedeutung.

Wie bei allen mechanischen Wellen hängt sie von der Dichte des Mediums und bei festen Körpern vom Elastizitätsmodul E , in Flüssigkeiten und Gasen vom Kompressionsmodul K ab.

In Tabelle 2 sind die Werte der Schallgeschwindigkeit in einigen Stoffen aufgeführt.

| Stoffe | Schallgeschwindigkeit in m/s | Stoffe | Schallgeschwindigkeit in m/s |
|-----------|------------------------------|--------------|------------------------------|
| Stahl | 5000 | Glas | 5500 |
| Granit | 3950 | Blei | 1300 |
| Mauerwerk | 3480 | Wasser | 1498 (bei 25 °C) |
| Holz | 2500-4500 | Kohlendioxid | 258 (bei 0 °C) |
| Kork | 500 | Wasserstoff | 1261 (bei 0 °C) |
| Gummi | 54 | Luft | 331,6 (bei 0 °C) |

Tabelle 2 Schallgeschwindigkeit in einigen Stoffen

Während bei festen Stoffen der Einfluss der Temperatur zu vernachlässigen ist, gilt die Schallgeschwindigkeit bei Flüssigkeiten und Gasen nur für eine bestimmte Temperatur. Bei Gasen ist sie zudem vom Druck abhängig.

Bei Normaldruck $p_{\text{amb}} = 1013 \text{ hPa}$ gilt zum Beispiel für die Schallgeschwindigkeit in Luft bei der Temperatur $\vartheta_1 = 0 \text{ °C}$, $c = 331,6 \text{ m/s}$, bei der Temperatur $\vartheta_2 = 15 \text{ °C}$ gilt $c = 340 \text{ m/s}$.

Experimentell wird die Schallgeschwindigkeit nach der Formel $c = f \cdot \lambda$ durch Messung von Frequenz und Wellenlänge bestimmt.

Schallleistung P

Von einer Schallquelle breitet sich Energie mit den Wellenfronten in den Raum aus. Bezieht man diese abgegebenen Energie W auf die Zeit t , so erhält man die Schallleistung der Schallquelle P , es gilt:

$$P = \frac{W}{t} ; [P] = \frac{1 \text{ Ws}}{\text{s}} = 1 \text{ W}$$

Die Schallleistung verschiedener Schallquellen ist sehr unterschiedlich. Sie beträgt z.B. bei der menschlichen Sprache ca. 10^{-5} W , bei einer Sirene ca. 10^3 W .

Schallintensität I

Teilt man die Schallleistung durch die von der Welle bestrahlte Fläche, ergibt sich die **Schallintensität** oder **Schallstärke**, die Definition lautet:

Die Schallintensität gibt die Energiemenge an, die durch eine Schallwelle in einer Sekunde auf eine Fläche von 1 m^2 wirkt.

Es gilt:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{W}{A \cdot t} ; [I] = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Da die Oberfläche einer Kugel mit dem Quadrat des Radius wächst, ist die Schallintensität bei einer kugelförmigen Schallwelle antiproportional zum Quadrat des Abstandes r von der Schallquelle.

Schalldruck p

Die Ausbreitung von longitudinalen Wellen in einem Körper beruht auf der Erzeugung von **Druckschwankungen**, die sich messtechnisch z.B. durch Kondensatormikrofone, bestimmen lassen. Die Momentanwerte der Druckschwankungen in einer Welle sind sehr unterschiedlich und schwanken während einer Periodendauer zwischen dem positiven und negativen Wert der **Amplitude der Druckschwankung \hat{p}** .

Für die Berechnung von Schallleistung und Schallintensität wird daher der **Effektivwert des Schallwechseldruckes (Quadratischer Mittelwert)** bestimmt. Die Schallfeldgröße für den Effektivwert des Schallwechseldruckes wird, solange keine Gefahr der Verwechslung mit anderen Drücken besteht, mit **Schalldruck p** bezeichnet, und für harmonische Schallwellen gilt:

$$p = \frac{\hat{p}}{\sqrt{2}} \quad (\text{Effektivwert des Schallwechseldruckes})$$

Mit dem Schalldruck p , der Dichte ρ , der Schallgeschwindigkeit c und der Fläche A einer harmonischen Schallwelle berechnet sich die **Schallleistung** nach

$$P = \frac{p^2}{\rho \cdot c} \cdot A$$

und die **Schallintensität** mit

$$I = \frac{p^2}{\rho \cdot c}$$

Bei den obigen Berechnungen sind Verluste, z.B. auf Grund von Dämpfung bei der Wellenausbreitung, nicht berücksichtigt.

Schallpegel

Die beschriebenen physikalischen Vorgänge und Größen beim Schall wirken durch das Trägermedium Luft auf den Menschen. Dieser reagiert auf Grund des Gehörs auf diese Reize mit bestimmten Empfindungen, die im Prinzip keine physikalischen sondern physiologische Wirkungen sind.

Die unterste, gerade noch wahrnehmbare Schallintensität I_0 wird als **Hörschwelle** bezeichnet. Sie hat im Bereich der größten Empfindlichkeit des Ohres bei $f = 1000 \text{ Hz}$ einen Wert von $I_0 = 1 \text{ pW/m}^2$, was einem Schalldruck von $p_0 = 20 \text{ } \mu\text{Pa}$ entspricht. Die Hörschwelle ist zudem stark frequenzabhängig, ihren Verlauf zeigt Abbildung 46.

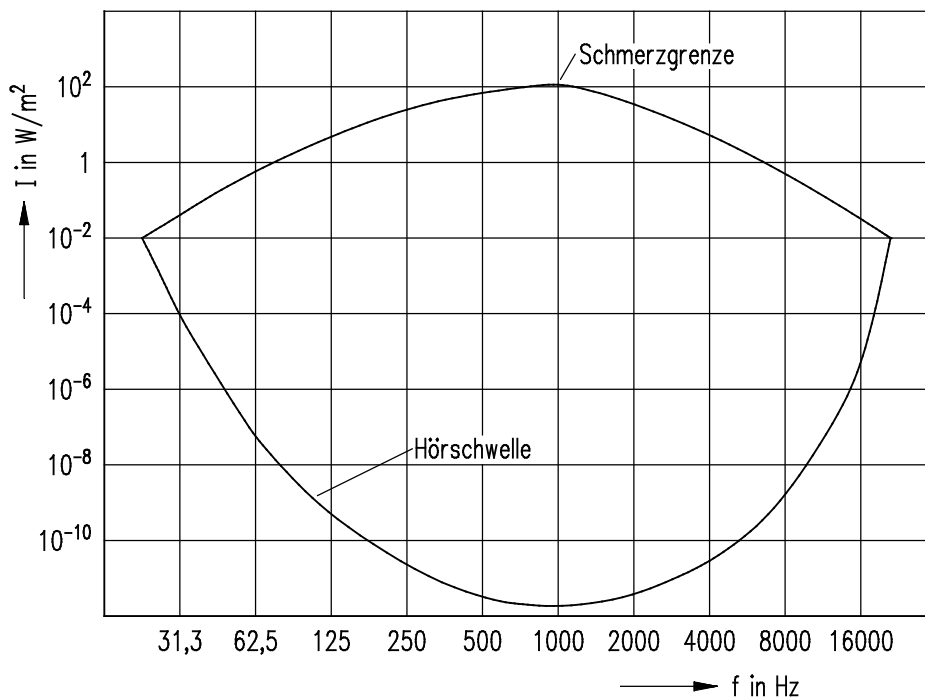


Abbildung 46 Hörfläche des menschlichen Ohres

Extrem große Schallintensitäten und Schalldrücke werden als Schmerz empfunden. Auch die **Schmerzgrenze** beim Schall ist frequenzabhängig und wird durch die obere Kurve von Abbildung 46 dargestellt. Schmerzgrenze und Hörschwelle schließen die **Hörfläche** des menschlichen Ohres ein.

Bezieht man die Schallintensität an der Schmerzgrenze auf die Schallintensität der Hörschwelle, so ergibt sich ein Faktor von $2 \cdot 10^{14}$, d.h. der 200-billionenfache Wert.

Diese große Dynamik des Gehöres ist nur möglich, weil zwischen der Schallintensität bzw. dem Schalldruck und der **Lautstärke-Empfindung** ein nicht linearer Zusam-

menhang besteht. Wie bei vielen anderen Sinneswahrnehmungen, z.B. Gewicht, Druck, Licht, etc. gilt auch für das Gehör folgende Regel:

Die absolute Änderung der subjektiven Empfindung ist proportional zum Logarithmus der relativen Änderung des auslösenden Reizes.

Diese Regel lässt es notwendig erscheinen, für eine bessere Vergleichbarkeit der Werte eine genormte Bezugsgröße einzuführen, und wegen der großen Bandbreite zur besseren Übersichtlichkeit, die ins Verhältnis gesetzten Größen zu logarithmieren.

Für die Schallintensität und dem Schalldruck wurden daher folgende Pegeldefinitionen eingeführt:

Schallintensitätspegel

$$L_I = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}; [L_I] = \text{dB} \quad (\text{dB} \triangleq \text{Dezibel})$$

Schalldruckpegel

$$L_p = 10 \cdot \lg \frac{p^2}{p_0^2} = 20 \cdot \lg \frac{p}{p_0}; [L_p] = \text{dB}$$

Als genormte Bezugswerte werden für den Schalldruck $p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$ und für die Schallintensität $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ - die Werte der Hörschwelle bei 1000 Hz - festgelegt.

Zur **Kennzeichnung als Pegelwerte** wird den dimensionslosen Zahlen die Einheit **dB (Dezibel)** zugeordnet.

Lautstärke L_s

Wie aus Abbildung 46 ersichtlich, ist die Schallempfindung des Ohres von der Frequenz abhängig. Man hat daher durch subjektive Hörvergleiche an einer Vielzahl von Personen einen Zusammenhang zwischen **empfundener Lautstärke L_s** und dem **Schalldruckpegel L_p** hergestellt.

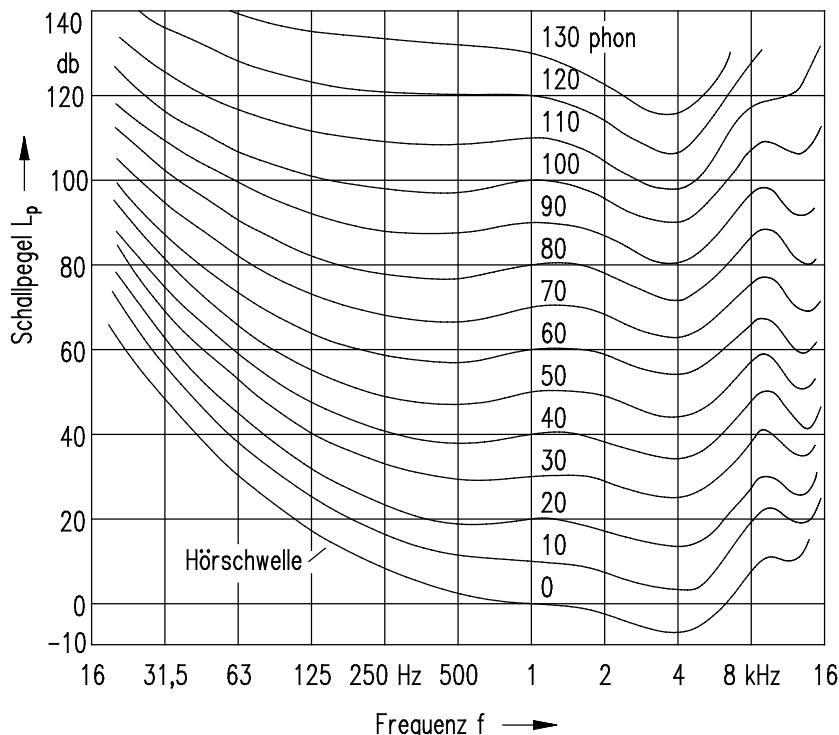


Abbildung 47 Kurven gleicher Lautstärkepegel

Diese Untersuchungen ergeben eine Schar empirischer Kurven gleicher Lautstärken (Abbildung 47).

Als Normalschall für die Lautstärkebestimmung wurde ein Ton der Frequenz $f = 1000 \text{ Hz}$ gewählt, und es gilt:

$$L_s = 20 \cdot \lg \frac{p}{p_0}; \quad [L_s] = \text{phon}$$

Bei der Referenzfrequenz 1000 Hz stimmen Schalldruckpegel L_p und Lautstärke L_s überein. Für andere Frequenzen wird der zu bewertende Schall (Messschall) mit dem Normalschall verglichen, dessen Schalldruck so eingestellt wird, dass er nach dem Gehör genauso laut erscheint wie der Messschall. Der Schalldruck des Normalschalls wird in die Gleichung eingesetzt und der berechnete Wert als Lautstärkepegel in Phon für den Messschall angegeben.

Die Nachbildung dieser Kurven in Messgeräten zu Messung der Lautstärke ist sehr aufwändig. In der Praxis werden daher für die Bestimmung der Lautstärke Pegelmessungen des Schalldruckes durchgeführt, wobei Filter mit einem genormten Durchlassverhalten eingesetzt werden. Der am häufigsten eingesetzte Filter entspricht der Frequenzbewertungskurve A nach DIN 45633 Teil 1. Den Verlauf der Bewertungskurve zeigt Abbildung 48.

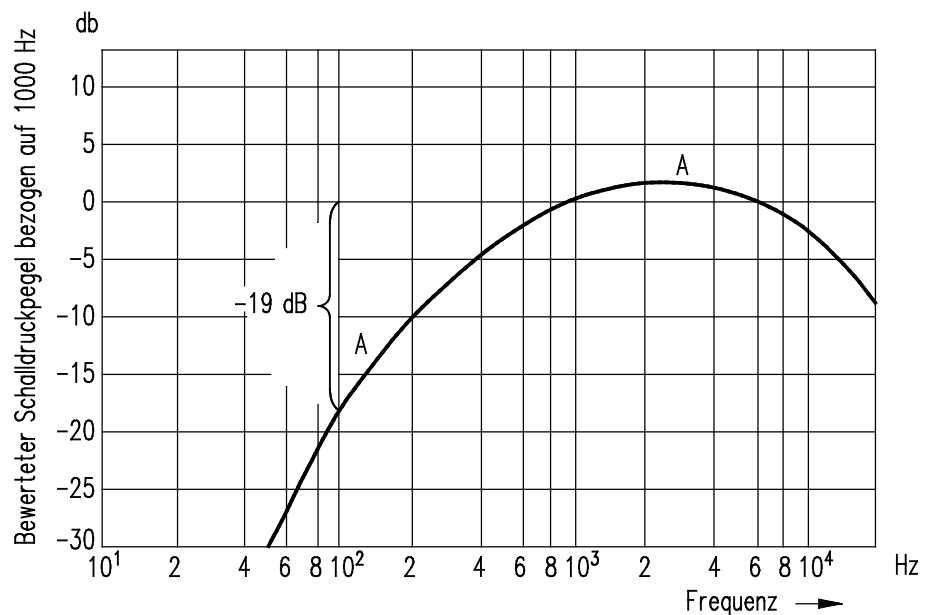


Abbildung 48 Frequenzbewertungskurve A

Die Bewertungskurve gibt den Korrekturwert an, um den der Schalldruckpegel des Messschalls für die empfundene Lautstärke korrigiert werden muss. Der sich ergebende Pegel für die Lautstärke wird mit L_A bezeichnet. Die Kennzeichnung dieser Lautstärke ist dB(A).

Lehrbeispiel 1

Ein Schallpegelmesser bestimmt für einen Ton von 100 Hz einen Schalldruckpegel von 40 dB.

Bestimmen Sie die Lautstärke L_A des Tones in dB(A)!

Lösung

Gegeben: $f = 100 \text{ Hz}$; $L_p = 40 \text{ dB}$

Gesucht: L_A in dB(A)

Aus der Bewertungskurve A Abbildung 48 ergibt sich ein Korrekturwert von -19 dB .

$$L_A = 40 \text{ dB} - 19 \text{ dB} = 21 \text{ dB(A)}$$

Die empfundene Lautstärke hat einen Pegel von 21 dB(A)!

Die Frequenzbewertungskurve A ist genauso aussagekräftig für die empfundene Lautstärke wie die Phonkurven, da immer Abweichungen in der Empfindung von Mensch zu Mensch auftreten werden.

In der folgenden Tabelle sind einige Lautstärkepegel für Geräusche aus dem Alltag aufgeführt.

| Geräusch | dB(A) | Geräusch | dB(A) |
|--|-------|--|-------|
| Flüstersprache, leises Uhr ticken | 10 | Schreibmaschine, normaler Verkehrslärm (PKW) | 70 |
| Blätterrauschen | 20 | Fahrgeräusch in der Straßenbahn oder Eisenbahn, Straße mit starkem Verkehr | 80 |
| untere Grenze üblicher Wohngeräusche | 30 | Kreissäge in 1 m Abstand | 90 |
| mittellaute Wohngeräusche, leise Umgangssprache, tropfender Wasserhahn | 40 | Mechanische Weberei | 100 |
| normale Unterhaltung, Rundfunk bei Zimmerlautstärke | 50 | Kesselschmiede, Drucklufthammer in 20 cm Abstand | 120 |
| laute Unterhaltung, laute Rundfunkmusik, lärmschwacher Staubsauger | 60 | Motorenprüfstand, Flugzeugtriebwerk | 130 |
| | | Schmerzgrenze | 150 |

Tabelle 3 Lautstärkepegel einiger Geräusche in dB(A)

Dopplereffekt

Unter dem von Christian Doppler (1803-1853) entdeckten, und nach ihm benannten Dopplereffekt, versteht man den Frequenzunterschied zwischen der ausgestrahlten Frequenz einer Welle und der registrierten Frequenz, bei einer Relativbewegung zwischen Sender und Empfänger.

Im Alltag ist dieser Effekt z.B. aus der Änderung der Tonlage eines mit einer Sirene vorbeifahrenden Fahrzeuges zu tieferen Frequenzen hin bekannt.

Da bei den Schallwellen das Trägermedium Luft als ruhend angesehen werden kann, müssen, auch bei gleicher Relativgeschwindigkeit v zwischen Sender und Empfänger, die Rechnungen für die zwei Fälle, bewegter Sender und ruhender Empfänger sowie ruhender Sender und bewegter Empfänger, getrennt durchgeführt werden.

Bewegter Sender und ruhender Empfänger

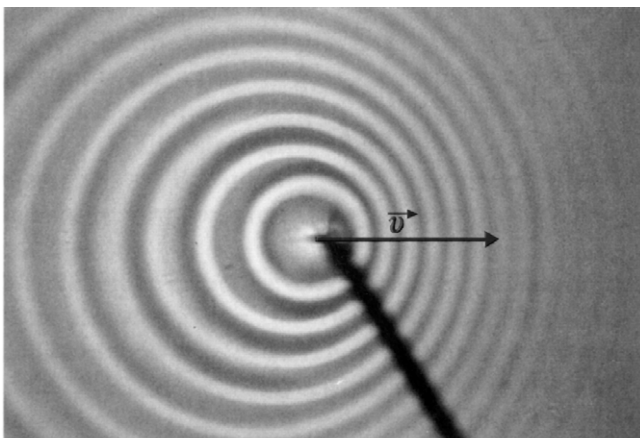


Abbildung 49 Doppler-Effekt bei Wasserwellen

Wie bei den Wasserwellen in Abbildung 49 zu erkennen, verringert sich bei einem bewegten Sender die Wellenlänge in Bewegungsrichtung. Ein sich in Bewegungsrichtung befindender, ruhender Empfänger hört Schwingungen einer Welle mit der verkürzten Wellenlänge $\lambda' = \lambda - s$. Zudem gilt bei der Geschwindigkeit v des Senders nach der Zeit $t = T$ für die Strecke $s = v \cdot T$.

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\lambda' = \lambda - s = \lambda - v \cdot T = \frac{c}{f} - \frac{v}{f}$$

Mit $f' = c/\lambda'$ ergibt sich für die **Dopplerfrequenz** bei bewegtem Sender:

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\frac{c}{f} - \frac{v}{f}} = f \cdot \frac{1}{1 - \frac{v}{c}}$$

Die **Frequenzänderung** Δf durch den Doppler-Effekt berechnet sich nach:

$$\Delta f = f' - f = f \cdot \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} - f = f \cdot \frac{v}{c - v}$$

Für kleine Relativgeschwindigkeiten $v \ll c$ gilt in guter Näherung:

$$\Delta f = f \cdot \frac{v}{c}$$

Der Geschwindigkeitswert v ist positiv, wenn sich der Sender dem Empfänger nähert. Dadurch wird die Frequenzänderung Δf größer Null und die Dopplerfrequenz f' ist größer als die emittierte Frequenz f . Entfernt sich der Sender vom Empfänger ist, v negativ. Die Frequenzänderung Δf wird kleiner Null und die Dopplerfrequenz f' ist kleiner als die emittierte Frequenz f .

Ruhender Sender und bewegter Empfänger

Bewegt sich ein Empfänger mit der Geschwindigkeit v relativ zum ruhenden Sender, bleibt die Wellenlänge λ konstant. Die mit der Geschwindigkeit c fortschreitenden Wellen begegnen dem Empfänger jedoch mit der größeren Relativgeschwindigkeit $c' = c + v$.

Ein bewegter Empfänger hört somit eine Schwingung mit der **Dopplerfrequenz**:

$$f' = \frac{c'}{\lambda} = \frac{c + v}{\lambda} = f \left(\frac{c + v}{c} \right) = f \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \right)$$

Für die **Frequenzänderung** Δf ergibt sich:

$$\Delta f = f \cdot \frac{v}{c}$$

Für positive oder negative Geschwindigkeiten gelten die gleichen Betrachtungen wie in dem Fall bewegter Sender und ruhender Empfänger.

Anwendung findet der Dopplereffekt z.B. in der Medizin bei der **Dopplersonografie**. Ultraschall von über 20 kHz wird von den verschiedenen Grenzflächen der Gewebe reflektiert. Bewegt sich das Gewebe, wie z.B. rote Blutkörperchen in den Blutgefäßen, führt dies zu einer Frequenzänderung des reflektierten Ultraschalls. Diese wird von dem Diagnosegerät registriert und ermöglicht so die Untersuchung der Blutgefäße und z.B. die Lokalisierung von Blutpfropfen.

Ton, Klang, Geräusch

Neben der subjektiven Größe Lautstärke unterscheidet der Mensch zwischen Tönen, Klang bzw. Klangfarben und Geräuschen. Diese drei subjektiven Unterscheidungen können - in den meisten Fällen - durch objektive, physikalische Größen beschrieben werden.

Ton

Beim **Ton** handelt es sich um eine **harmonische Schallwelle** mit einer **definierten Frequenz** oder **Tonhöhe**. So hat z.B. der Kammerton a_1 eine Tonhöhe von 440 Hz.

Das Verhältnis zweier Frequenzen wird **Intervall** genannt, und das Frequenzverhältnis 2:1 zwischen zwei Tönen heißt **Oktave**. Der Ton a_2 mit 880 Hz liegt somit eine Oktave höher als der Ton a_1 .

Klang

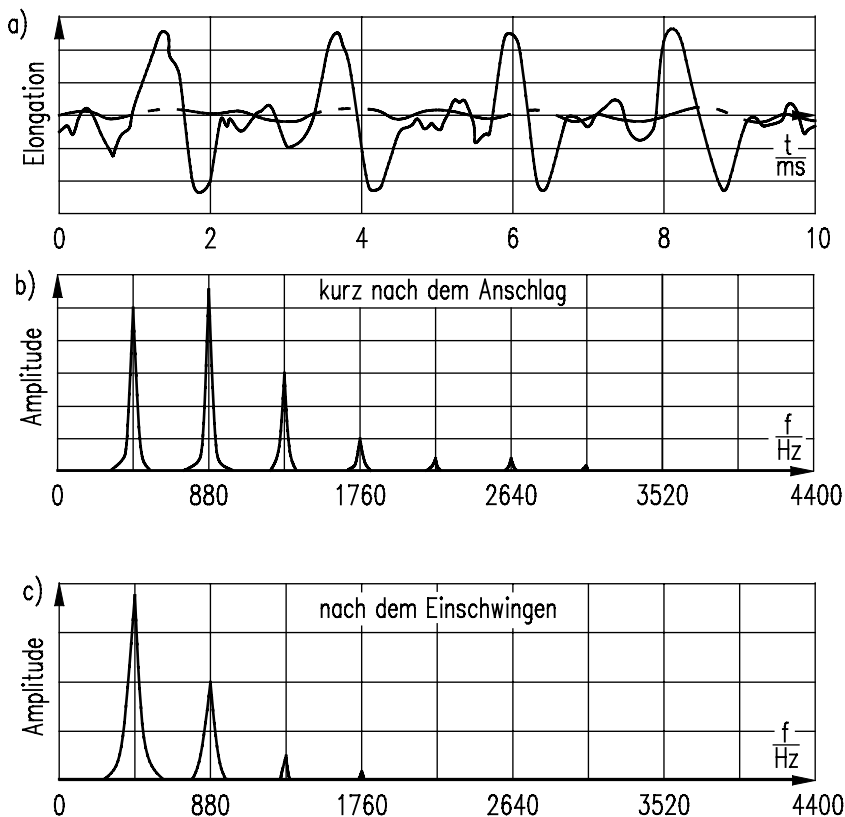


Abbildung 50 Schwingungsverlauf und Klangspektrum bei einem Klavier

Der **Klang** oder die **Klangfarbe** entsteht durch die Überlagerung mehrerer harmonischer Schwingungen, deren Frequenzen im Verhältnis ganzer Zahlen stehen.

Die Überlagerung dieser harmonischen Schwingungen selbst ist in der Regel keine harmonische Schwingung.

Abbildung 50a zeigt den zeitlichen Verlauf der Schwingung für den Ton a_1 bei einem Klavier kurz nach dem Anschlag der Saite und nach dem Einschwingen.

Mithilfe der Fourier-Analyse kann der Klang des Klaviers in ein Klangspektrum, d.h. in den Grundton und die auftretenden Obertöne mit den jeweiligen Amplituden, zerlegt werden.

Nach dem Anschlag wird der Klang des Klaviers durch einen starken Anteil von Obertönen geprägt, der Klavierton wirkt „hart“ (Abbildung 50b).

Nach dem Einschwingen, bei leiserem Ton, übernimmt der Grundton die Führung und das Klavier wirkt „weich“ (Abbildung 50c).

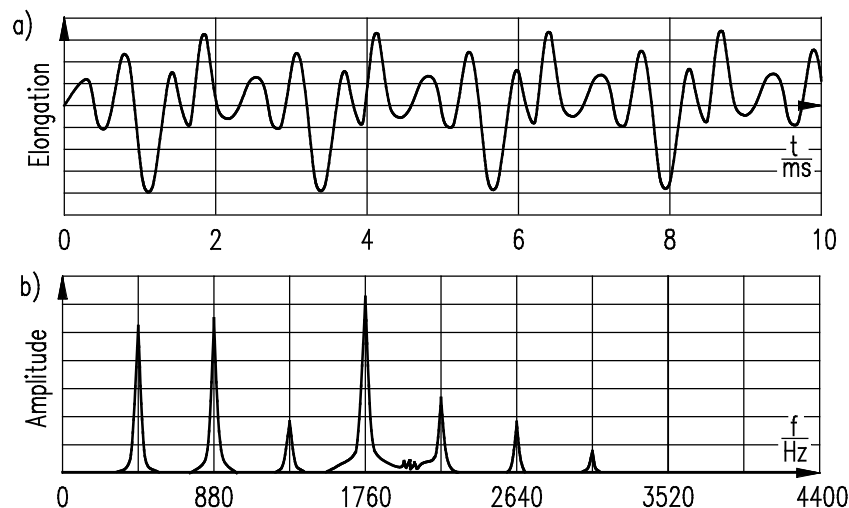


Abbildung 51 Schwingungsverlauf und Klangspektrum bei einer Geige

Für den gleichen Ton a_1 einer Geige zeigt Abbildung 51a einen völlig anderen Schwingungsverlauf und Abbildung 51b ein verschiedenes Klangspektrum.

Man erkennt im Klangspektrum, dass die Obertöne wesentlich stärker am Klang beteiligt sind, als der Grundton.

Dies ist auf die besondere Schwingungsform der gestrichenen Saite und dem komplexen Aufbau des Resonanzkörpers zurückzuführen.

Die Töne und Klänge der Blasinstrumente entstehen durch die Eigenschwingungen von Luftsäulen. Diese stehenden Longitudinalwellen lassen sich besonders gut am Kundt'schen Rohr beobachten (Abbildung 52)

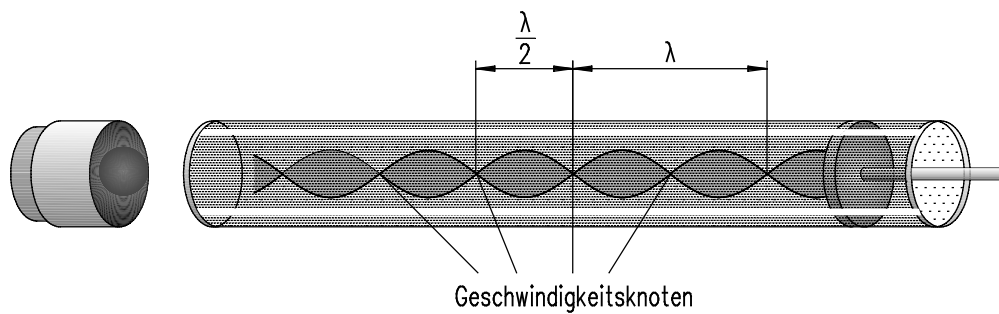
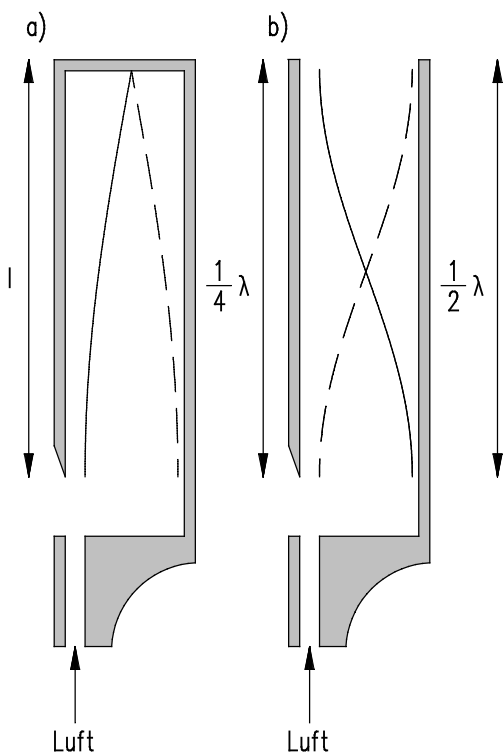


Abbildung 52 Kundt'sche Staubfiguren

Vor einem offenen oder halb offenen Glasrohr, in dem feines, trockenes Sägemehl verteilt ist, wird ein Lautsprecher aufgestellt. Mit einem Frequenzgenerator werden vom Lautsprecher Töne erzeugt, wobei im Sägemehl bei bestimmten Frequenzen stehende Staubfiguren entstehen. Diese Staubfiguren geben die Knoten und Bäuche der Geschwindigkeitswelle einer stehenden Longitudinalwelle wieder. Der Abstand zwischen zwei Geschwindigkeitsknoten ist dabei $\lambda/2$ (Abbildung 52).

Die Form der stehenden Welle bzw. die Eigenschwingung einer Luftsäule ergibt sich aus dem Reflexionsverhalten der Welle an den Röhrenenden (Abbildung 53).

Abbildung 53 Grundschwingung der Geschwindigkeitswelle
a) einer geschlossenen b) einer offenen Pfeife

Am geschlossenen Ende eines Rohres können sich die Luftmoleküle nicht bewegen. Es bildet sich ein Knoten der Geschwindigkeitswelle (Abbildung 53a). Druckschwankungen können an diesem Ende nicht ausgeglichen werden und es entsteht ein Bauch der Druckwelle.

Am offenen Ende eines Rohres sind die Verhältnisse für die Druck- und Geschwindigkeitswelle umgekehrt. Die Moleküle können frei schwingen, es entsteht ein Geschwin-

digkeitsbauch (Abbildung 53b). Druckschwankungen werden ausgeglichen, es liegt ein Knoten der Druckwelle vor.

Bei einer stehenden Longitudinalwelle sind Druck- und Geschwindigkeitswelle um $\lambda/4$ gegeneinander verschoben.

Aus Abbildung 53 ist zudem zu erkennen, dass eine geschlossene (gedeckte oder gedackte) Pfeife mit der Länge l den gleichen Ton abgibt, wie eine offene Pfeife mit der Länge $2 \cdot l$.

Offene und geschlossene Pfeifen unterscheiden sich jedoch generell im Klang, da bei den gedeckten Pfeifen nur ungeradzahlige Oberschwingungen auftreten können.

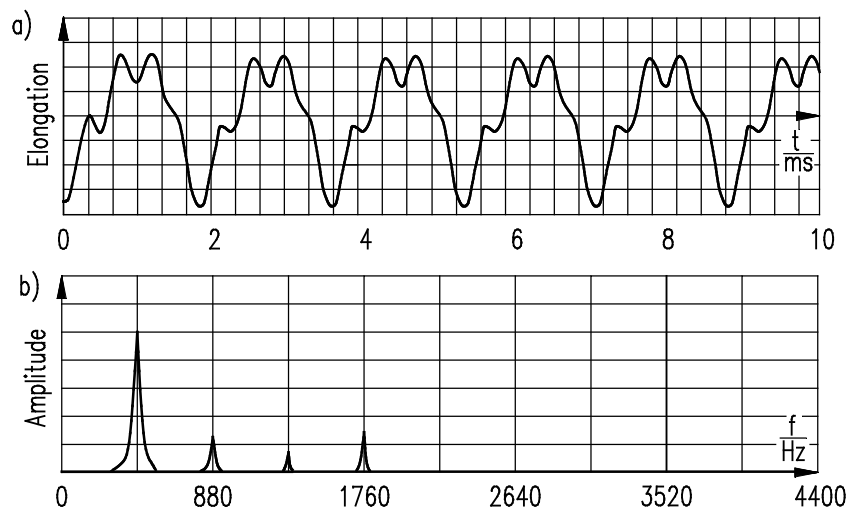


Abbildung 54 Schwingungsverlauf und Klangspektrum bei einer Querflöte

Abbildung 54 zeigt den Schwingungsverlauf und das Klangspektrum einer Querflöte. Man erkennt, dass bei einer gut angeblasenen Querflöte der Anteil der Oberschwingungen sehr gering ist, und die Flöte einen fast reinen Ton erzeugt.

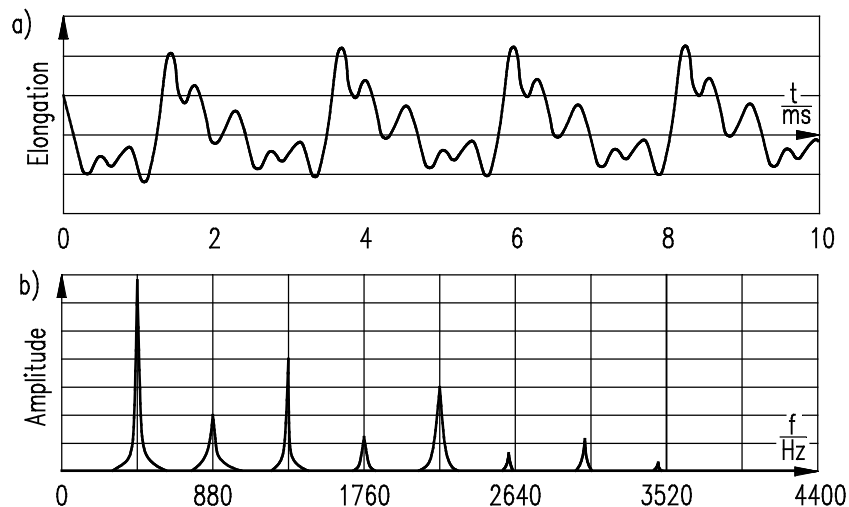


Abbildung 55 Schwingungsverlauf und Klangspektrum bei einem Saxophon

Im Klangspektrum des Saxofons in Abbildung 55 ist der deutlich höhere Anteil der Oberschwingungen zu erkennen. Auch sind die Amplituden der ungeradzahligten Oberschwingungen deutlich größer, sodass bei einem Saxofon von einer halb offenen Luftsäule ausgegangen werden kann.

Geräusch

Überlagern sich harmonische Schwingungen beliebiger Frequenzverhältnisse, wird die sich ergebende Schwingung von Menschen nicht als Klang, sondern als Geräusch empfunden. Zu den Geräuschen zählen das Quietschen einer Bremse, das Zerreißen von Papier, die Schallabstrahlung von Maschinen etc.

Schallschutz

Mehr als 50 % der Bevölkerung Deutschlands fühlt sich durch Lärm belästigt. Die Lärmbelästigung steht damit von allen unmittelbar auf den Menschen einwirkenden Belästigungen an erster Stelle!

Nach einer vom Institut für praxisorientierte Sozialforschung in Mannheim durchgeführten Repräsentativbefragung empfanden die meisten Befragten den Außenlärm (Autos, Flugzeuge) im Vergleich zum Lärm innerhalb des Hauses als wesentlich störender.

Zum Schutz des Menschen vor unzumutbaren Lärmbelästigungen durch Schallübertragung aus der Umgebung legt die DIN 4109

- Mindestwerte der Schalldämmung von Bauteilen und
- Höchstwerte des Schallpegels von Lärmquellen im Gebäude fest.

Die in der Norm DIN 4109 gestellten Anforderungen müssen mindestens erfüllt werden. Ein darüber hinausgehender Schallschutz ist z.B. in der

- VDI-Richtlinie 4100
Schallschutz für Wohnungen
Kriterien für Planung und Beurteilung (im eigenen Wohnbereich),

festgelegt.

Das Ziel der Norm DIN 4109 ist der Schutz von Menschen in Aufenthaltsräumen

- vor Luft- und Trittschallübertragung aus benachbarten fremden Räumen
- vor Lärm aus haustechnischen Anlagen und aus Betrieben im selben Gebäude oder in baulich damit verbundenen Gebäuden
- gegen Außenlärm, wie Verkehrslärm, oder Lärm von Gewerbe- und Industriebetrieben, die mit den Aufenthaltsräumen baulich nicht verbunden sind

Grundbegriffe des Schallschutzes

Für die verschiedenen Maßnahmen zum Schallschutz sind die nachfolgenden Begriffe bzw. Rechengrößen ausschlaggebend.

Schallarten

- Luftschall** Der Schall gelangt über schwingende Luftmoleküle an das menschliche Ohr. Auslöser können die menschlichen Stimmbänder oder die Membran eines Lautsprechers sein.
- Körperschall** Er breitet sich durch direkte Anregung in festen Körpern (z.B. Mauerwerk) aus. Körperschall entsteht in Gebäuden entweder durch Luftschall (hier werden die Körper, z.B. eine Wand, durch den Schalldruck in Schwingungen versetzt) oder durch mechanische Einflüsse (Klopfen, Hämmern, Sanitäre Anlagen, Maschinen, etc.) Körperschall entsteht u.a. beim Begehen einer Decke und wird deshalb dann auch als Trittschall bezeichnet.

Schalldämmmaß R_w Schallübertragung zwischen 2 Räumen **ohne** Beachtung der Übertragung durch angrenzende (flankierende) Bauteile

(Bau)-Schalldämmmaß R'_w Schallübertragung zwischen 2 Räumen **mit** Beachtung der Übertragung über Nebenwege.

| | Größe | Zeichen/Einheit | | Bemerkungen |
|---|--|-----------------|--------|---|
| 1 | Schallpegel | L | dB | üblicherweise als Funktion der Frequenz gemessen, z.B. Sende- und Empfangsraumpegel L_S und L_E |
| 2 | bewerteter Schallpegel | L_A | dB (A) | Bewertung über alle Frequenzen eines Geräusches nach Bewertungskurve A |
| 3 | Beurteilungspegel | L_{Am} | dB (A) | „gemittelter“ Pegel von zeitlich veränderlichen Pegeln |
| 4 | Schalldämmmaß | R | dB | im Wesentlichen $R = L_S - L_E$ (+ konst) |
| 5 | bewertetes Schalldämmmaß | R_w | dB | Zahlenangabe, in der Frequenzen zwischen 100 und 3150 Hz beurteilt werden |
| 6 | bewertetes (Bau)-Schalldämmmaß | R'_w | dB | Zahlenangabe, in der Frequenzen zwischen 100 und 3150 Hz beurteilt werden (w), mit Beachtung der Übertragung über Nebenwege (') |
| 7 | bewerteter Normtrittschallpegel | $L'_{n,w}$ | dB | Zahlenangabe für den bewerteten Trittschallpegel einer Decke |
| 8 | Trittschallverbesserungsmaß | ΔL_w | dB | Zahlenangabe für die bewertete Trittschallminderung einer Deckenauflage |
| 9 | äquivalenter bewerteter Normtrittschallpegel | $L_{n,w,eq}$ | dB | Zahlenangabe zur Kennzeichnung einer Massivdecke ohne Deckenauflage (Rohdecke) $L'_{n,w} = L_{n,w,eq} - \Delta L_w$ |

Tabelle 4 Kennzeichnende Größen für den Luft- und Trittschallschutz von Bauteilen

Schalldämmmaßnahmen

Das menschliche Ohr kann Frequenzen von ca. 16 Hz bis 20 kHz wahrnehmen. Je nach Vorschädigung oder auch nach Alter des Menschen verringert sich dieser Bereich mehr oder weniger stark.

Für bautechnische Schalldämmmaßnahmen wird nur der relevante Bereich von 100 Hz bis 3150 Hz betrachtet. Dieser Bereich enthält den bauakustischen Frequenzbereich. Außerhalb dieses Bereiches auftretende Frequenzen lassen sich nur unter sehr hohem Aufwand dämmen und sind zudem statistisch gesehen sehr selten.

Belästigungen in diesem Bereich sind zum Beispiel sehr tiefe Bässe aus einer Musikanlage oder auch sehr hohe Töne, z.B. ein Rückkopplungspfeifen. Diese sind kaum zu dämmen. Hier ist auf eine eigentlich selbstverständliche zwischenmenschliche Rücksicht zu verweisen.

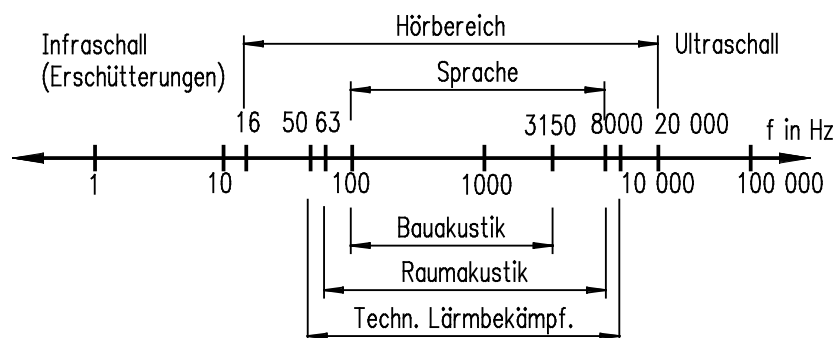
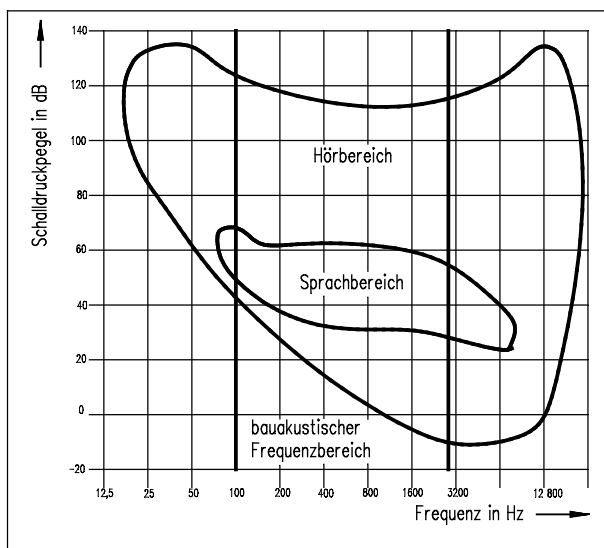
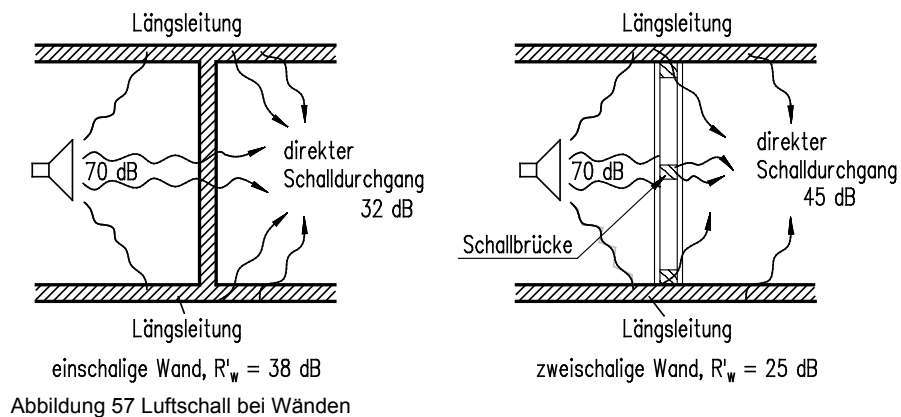


Abbildung 56 Bauakustisch relevanter Frequenzbereich

Luftschalldämmung

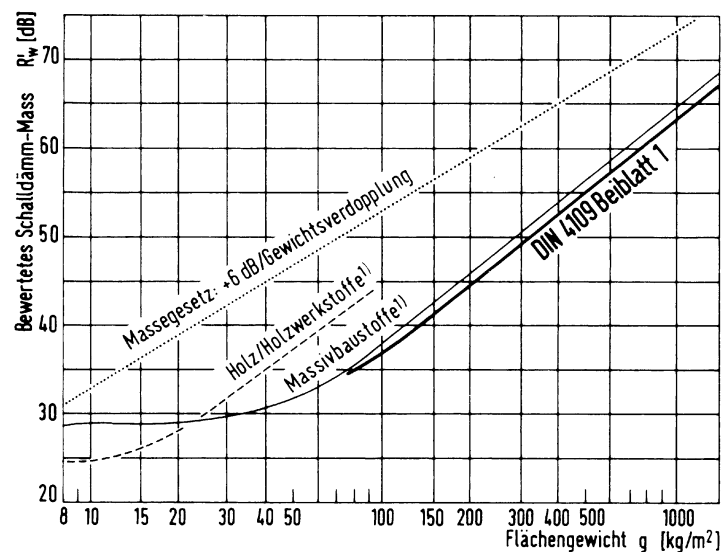
Die im Raum erzeugte Schallenergie wird beim Auftreffen auf ein Trennbauteil zum Teil reflektiert, zum anderen Teil regt sie das Trennbauteil zum Schwingen an und breitet sich als Körperschall im Bauteil selbst und in den angrenzenden Bauteilen aus. Ein geringer Teil der Schallenergie wird dabei in Wärmeenergie umgewandelt, der verbleibende Rest wird in den Nachbarraum abgestrahlt.



Bei der Schwingungsanregung muss die Massenträgheit des Bauteils überwunden werden. Je größer das Flächengewicht des Bauteils ist, desto weniger schwingt es und die Dämmwirkung nimmt zu. Ebenso macht sich die Massenträgheit mit steigender Frequenz stärker dämmend bemerkbar.

Die Schalldämmung eines einschaligen Bauteils steigt daher um 6 dB bei Verdoppelung des Flächengewichts g oder der Frequenz f :

$$R = 20 \cdot \lg(f \cdot g) - 45 \quad R \text{ in dB}$$



Die Luftschalldämmung einschaliger Bauteile wird nach DIN 4109 Beiblatt 1 (dick ausgezogene Kurve) bestimmt.

1) zurückgezogener Vorschlag nach DIN 4109 E 1979

Abbildung 58 Luftschalldämmung einschaliger Bauteile

Für den Luftschallschutz zwischen angrenzenden Räumen ist die Schalldämmung der verwendeten Bauteile maßgebend. Zu beachten ist, dass die Schallübertragung nicht nur direkt über eine Trennwand oder -decke, sondern auch über die seitlich angrenzenden Bauteile erfolgt. Das Schalldämmmaß R gibt an, um wie viel dB ein Bauteil dämmt.

Beispiel: Ein Sender emittiert einen Senderaumpegel von $L_S = 70 \text{ dB}$ und der Empfänger hinter einer Wand registriert einen Empfangsraumpegel von $L_E = 32 \text{ dB}$.

Dann besitzt die Wand ein Schalldämmmaß von $R = L_S - L_E = 38 \text{ dB}$

Körperschalldämmung

Körperschall in der Haustechnik entsteht durch Maschinen, Gebläse, Fließ- und Aufprallgeräusche in der Sanitärtechnik etc. Durch Maschinen verursachter Körperschall kann durch elastische Lagerung vermindert werden.

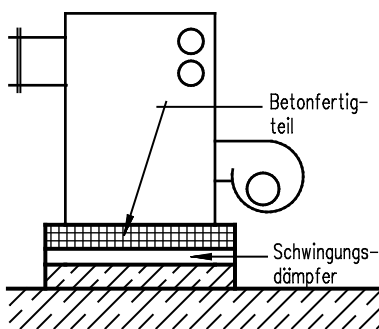


Abbildung 59 Körperschalldämmung

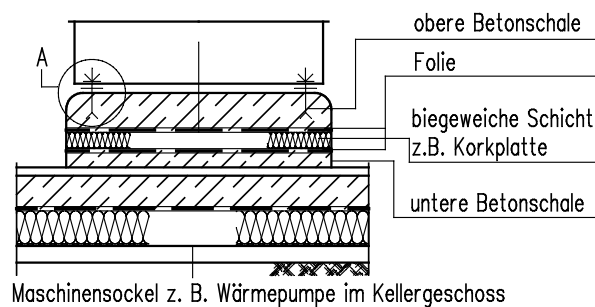


Abbildung 60 Körperschalldämmung im Detail

Trittschalldämmung

Die Körperschallanregung einer Decke, Treppe, Terrasse u.Ä. im Bau wird allgemein als Trittschallanregung bezeichnet. Dabei kann die Anregung durch Begehen, durch Möbelerücken, herabfallende Gegenstände oder durch den Betrieb von Haushaltsgeräten, wie Spül- und Waschmaschinen, Küchenmaschinen u.Ä., verursacht sein.

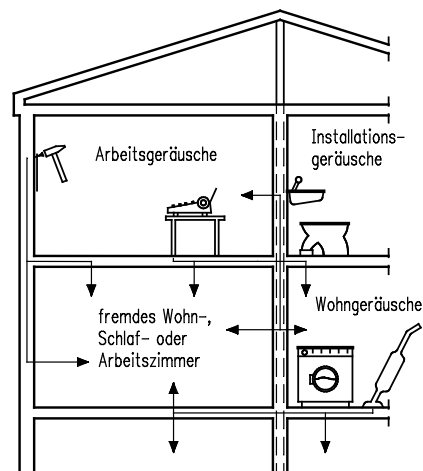


Abbildung 61 Körperschall

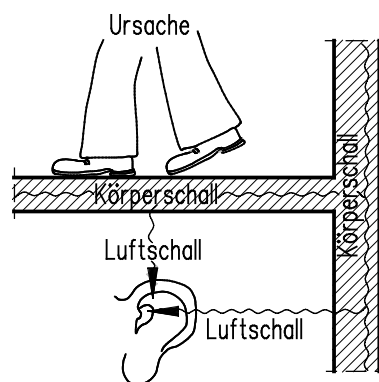


Abbildung 62 Trittschall als Sonderform des Körperschalls

Anders als beim Luftschall entsteht der Schall als Körperschall im Bauteil (z.B. Decke) selbst und wird vom angeregten Bauteil als Luftschall abgestrahlt. Zusätzlich erfolgt eine Körperschallübertragung vom angeregten Bauteil in das Bauwerk. Das führt neben einer vertikalen auch zu einer horizontalen und diagonalen Trittschallübertragung. Wegen der starken Weiterleitung des Körperschalles im Bauwerk muss beim Trittschallschutz besonders darauf geachtet werden, dass eine Einleitung störender Geräusche in den Baukörper vermieden wird.

Eine Unterbindung der Weiterleitung im Bauwerk ist praktisch nicht möglich, ausgenommen durch Trennfugen. Weitere wirksame Maßnahmen zur Trittschalldämmung sind

- weichfedernde Bodenbeläge, die die Entstehung von Gehgeräuschen und deren Einleitung in das Bauwerk mindern,
- schwimmende Estriche auf weichfedernden Dämmschichten zur Vermeidung der Körperschalleinleitung in das Bauwerk.

Schallabsorption

Schallabsorptionsmaßnahmen werden dort angewendet, wo in einem lauten Raum, z.B. in einem Maschinenraum, der Lärmpegel gesenkt werden soll. Auch in Konzert- oder Vortragsräumen, wo es auf gute Hörbarkeit ankommt, sind Schallabsorptionsmaßnahmen notwendig. Die Schallabsorption bezieht sich immer auf Luftschallvorgänge innerhalb des Raumes.

Zur Absorption von Tönen verschiedener Höhe sind unterschiedliche Schallabsorptionskonstruktionen notwendig. Zur Absorption von hohen Tönen eignen sich leichte Stoffe mit rauer und offenporiger Oberfläche, wie z.B. Mineralfaserplatten, Glasfaserplatten, Holzfaser- und Holzspanplatten oder verschiedene Schaumkunststoffe.

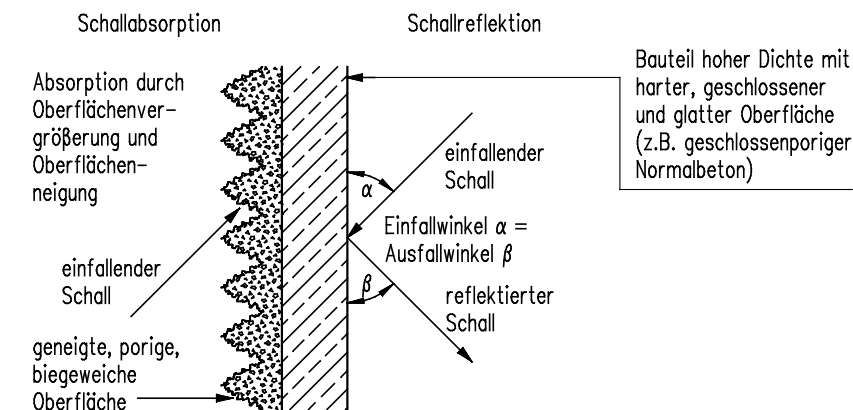


Abbildung 63 Absorption - Reflexion

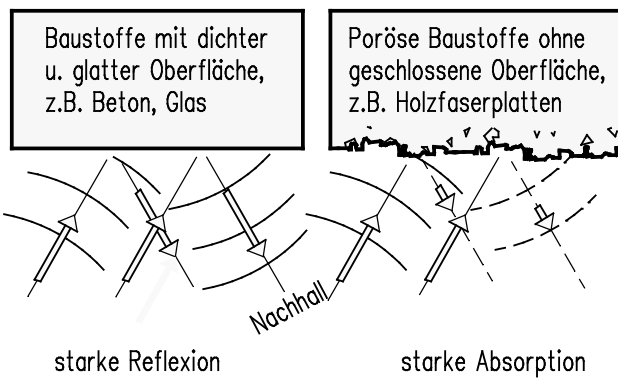


Abbildung 64 Schallabsorption

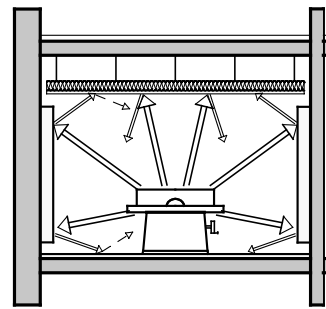


Abbildung 65 Schallabsorption im Innenraum

Die schallschluckende Wirkung der Absorptionsstoffe hängt von deren Oberfläche ab. Bei der Schallabsorption treffen die Luftschallwellen auf die Oberfläche des absorbierenden Materials. Ein Teil der Wellen wird reflektiert, d.h. in den Raum zurückgeworfen, der andere Teil dringt in die Poren ein. Die hin- und herschwingenden Luftmoleküle werden dabei an den Porenwänden durch Reibung abgebremst, wodurch die Schallenergie in Wärmeenergie umgewandelt und damit der Schall verschluckt, d.h. ausgelöscht wird. Die Schallabsorptionsstoffe werden meist als Platten unmittelbar an der Wand oder an der Decke befestigt.

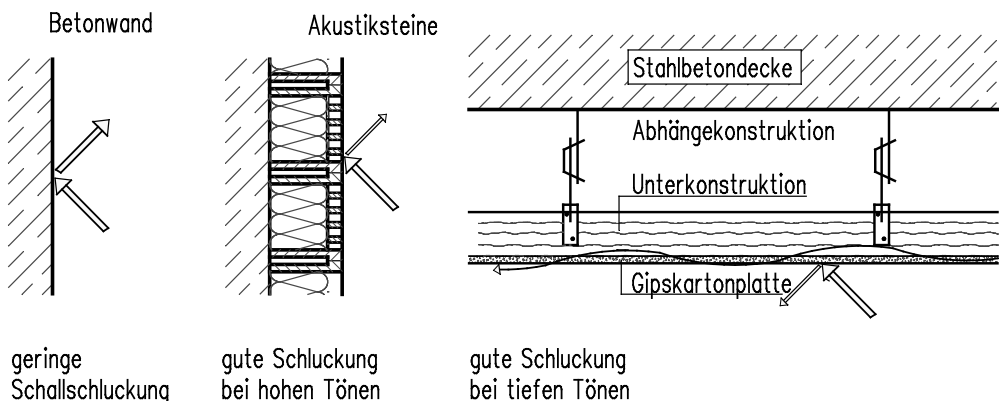


Abbildung 66 Schallabsorbierende Konstruktionen

AufgabenAufgabe 1

Beschreiben Sie die heutige Definition des Begriffes „Schall“!

Aufgabe 2

Welchen Effekt bewirkt eine Schallquelle?

Aufgabe 3

Beschreiben Sie die physikalische Bedeutung des Begriffes Körperschall!

Aufgabe 4

Erklären Sie den Begriff Infraschall!

Aufgabe 5

Welche Schallwellenarten sind in Flüssigkeiten möglich?

Aufgabe 6

Nennen Sie die physikalische Bedeutung der Schallintensität!

Aufgabe 7

Nennen Sie die physikalische Bedeutung des Schalldrucks!

Aufgabe 8

Was versteht man unter der Hörfläche?

Aufgabe 9

Beschreiben Sie den Dopplereffekt bei den Schallwellen!

Aufgabe 10

Erklären Sie den Unterschied zwischen einem Klang und einem Geräusch!

Lösungsanhang

Lösungen

1 Schwingungen

Aufgabe 1

Die Bewegungszustände des Oszillators müssen sich in gleichen Zeitabständen periodisch wiederholen.

Es muss eine stabile Ruhelage symmetrisch zu den Umkehrpunkten vorhanden sein.

Aufgabe 2

Die Kreisbewegung ist zwar eine periodische Bewegung, es gibt jedoch keine stabile Ruhelage.

Aufgabe 3

Die Elongation y einer Schwingung ist die Auslenkung aus der Ruhelage zu einem beliebigen Zeitpunkt t .

Die Amplitude \hat{y} ist die maximale Auslenkung aus der Ruhelage.

Der Zusammenhang zwischen beiden Größen wird durch das Zeit-Weg-Gesetz der Schwingung beschrieben: $y = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t)$.

Aufgabe 4

Eine Schwingung heißt harmonisch, wenn die Elongation eine sinusförmige Funktion der Zeit ist. Das Weg-Zeit-Diagramm ist eine Sinuskurve nach der Funktion: $y = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t)$.

Aufgabe 5

Bei einer harmonischen Schwingung ist die Rückstellkraft proportional zur Elongation, d.h. $F \sim y$. Die Richtung der Kraft wirkt der Auslenkung entgegen:

$$F = -k \cdot y, \text{ mit } k = m \cdot \omega^2$$

Aufgabe 6

$F = -c \cdot y$, wobei y die Auslenkung und c die Federkonstante nach dem Hooke'schen Gesetz ist.

Aufgabe 7

Nach $T = 2 \cdot \pi \sqrt{m/c}$ hat die Fallbeschleunigung keinen Einfluss auf die Schwingungsdauer. Es ändert sich die Ruhelage, um welche das Pendel schwingt. Die Auslenkung y_0 ist von der Gewichtskraft der Masse nach $G = m \cdot g$ abhängig.

Aufgabe 8

Nach $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{l/g}$ ist die Schwingungsdauer eines Fadenpendels unabhängig von der Masse und wird nur durch die Erdbeschleunigung und die Fadenlänge bestimmt.

Aufgabe 9

Die Amplitude hat keinen Einfluss auf die Schwingungsdauer. Die Geschwindigkeit und die Rückstellkraft ändern sich proportional zur Amplitude.

Aufgabe 10

Bei großen Auslenkungen $\alpha > 10^\circ$ wird die Periodendauer größer.

Aufgabe 11

Die rückstellende Kraft wird bei einem Fadenpendel durch die Gewichtskraft des Pendelkörpers hervorgerufen!

Aufgabe 12

Die Masse hat bei einem Fadenpendel keinen Einfluss auf die Schwingungsdauer!

Aufgabe 13

Die Schwingungsdauer wird kleiner, das Pendel schwingt schneller. Durch den Magneten wirkt zusätzlich zur Schwerkraft die magnetische Kraft auf den Pendelkörper. Dadurch wird die Rückstellkraft größer.

Aufgabe 14

Gegeben: $m_1 = 500 \text{ g}$; $m_2 = 700 \text{ g}$; $s = 28 \text{ cm}$

Gesucht: T

$$c = \frac{F}{s} = \frac{m_2 \cdot g}{s}$$

$$c = 24,5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{c}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0,5 \text{ kg} + 0,7 \text{ kg}}{24,5 \text{ N/m}}} \quad \text{mit } 1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1,2 \text{ kg} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}}{24,5 \text{ kg} \cdot \text{m}}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1,2 \text{ s}^2}{24,5}}$$

$$\underline{\underline{T = 1,39 \text{ s}}}$$

Aufgabe 15

Gegeben: $m = 250 \text{ g};$ $F = 0,50 \text{ N};$ $\hat{s} = 2,0 \text{ cm}$
 $\hat{y} = 4,0 \text{ cm}$

Aufgabe 15.1

Gesucht: $c;$ $T;$ $\omega;$

$$c = \frac{F}{s}$$

$$\underline{\underline{c = 25 \frac{\text{N}}{\text{m}}}}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c}}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0,250 \text{ kg s}^2 \text{m}}{25 \text{ kg m}}}$$

$$\underline{\underline{T = 0,63 \text{ s}}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\underline{\underline{\omega = 10 \text{ s}^{-1}}}$$

Aufgabe 15.2

$$s = 4,0 \text{ cm} \cdot \sin(10 \text{ s}^{-1} \cdot t)$$

Aufgabe 15.3

$$v = \hat{s} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$v = 40 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \cos(10 \text{ s}^{-1} \cdot t)$$

Aufgabe 15.4
Gesucht: v

$$v = 40 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right)$$

$$\underline{\underline{v = 40 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}}$$

Richtung: von oben nach unten

Aufgabe 16
Gegeben: $l = 1,0 \text{ m}; \quad z = 20; \quad t = 39 \text{ s}$
Aufgabe 16.1
Gesucht: g

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\Rightarrow g = \frac{4\pi^2 \cdot l}{T^2}$$

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot 1 \text{ m}}{\left(\frac{39}{20} \text{ s}\right)^2}$$

$$\underline{\underline{g = 10,38 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

Aufgabe 16.2

Die Abweichung des berechneten Wertes gegenüber dem exakten Wert beträgt $0,57 \text{ m/s}^2$.

Fehlerquellen: Ungenaue Bestimmung der Pendellänge; zu großer Auslenkwinkel; Abweichung der Schwerkraft vom Normalwert am Messort.

Aufgabe 17

Gegeben: l_1 ; $l_2 = \frac{1}{2} l_1$

Gesucht: T_1/T_2

$$T_1 = 2 \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

$$T_2 = 2 \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \sqrt{\frac{l_1 \cdot 2}{l_1}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

Aufgabe 18

Gesucht: $c = 100 \text{ N/m}$; $f = 2,0 \text{ Hz}$

Gegeben: m

$$T = \frac{1}{f}$$

$$T = 0,5 \text{ s}$$

$$T = 2 \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c}}$$

$$\Rightarrow m = \frac{c \cdot T^2}{4\pi^2}$$

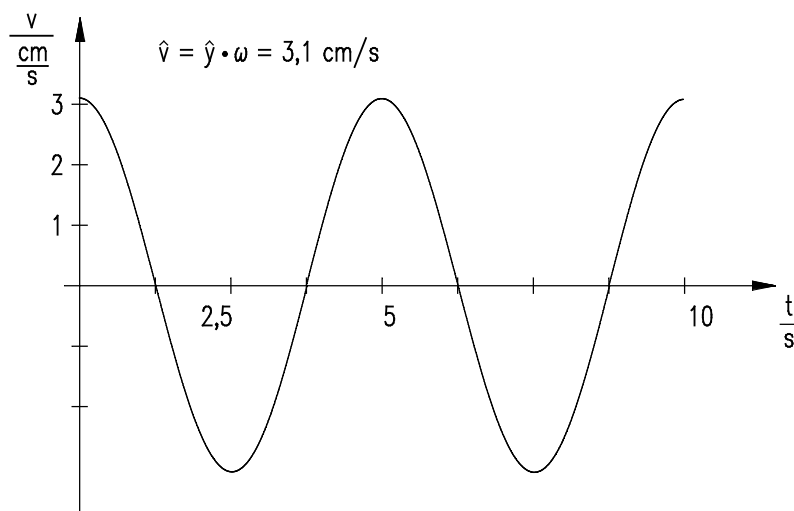
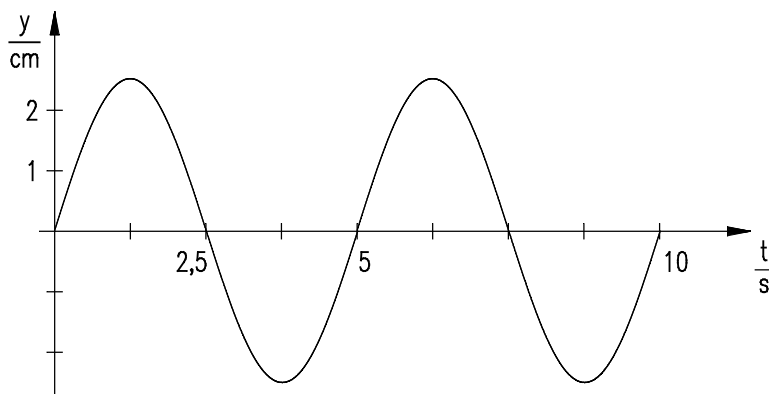
$$m = \frac{100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,5 \text{ s})^2}{4\pi^2}$$

$$\underline{\underline{m = 0,63 \text{ kg}}}$$

Aufgabe 19

Gegeben: $\hat{y} = 2,5 \text{ cm}$; $T = 5 \text{ s}$

Gesucht: t-y-Diagramm; t-v-Diagramm



Aufgabe 20

Gegeben: $c = 75 \text{ N/m}$;

$m = 0,20 \text{ kg}$;

$s = 0,6 \text{ cm}$

Gesucht: a

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c}}$$

$$T = 0,3245 \text{ s}$$

$$a = -\hat{s} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad s = \hat{s} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$a = -\omega^2 \cdot s$$

$$a = -\frac{4\pi^2 \cdot 0,6 \text{ cm}}{(0,3245 \text{ s})^2}$$

$$\underline{\underline{a = -2,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

Aufgabe 21

Gegeben: $m = 4,0 \text{ kg}; \quad f = 0,40 \text{ Hz}; \quad t = \frac{7}{6} \text{ s}; \quad \hat{y} = 10 \text{ cm}$

Gesucht: $y; \quad a; \quad F$

$$y = \hat{y} \cdot \sin(2\pi f \cdot t)$$

$$y = 10 \text{ cm} \cdot \sin\left(2\pi \cdot 0,40 \text{ s}^{-1} \cdot \frac{7}{6} \text{ s}\right)$$

$$\underline{\underline{y = 2,1 \text{ cm}}}$$

$$a = -\hat{y} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$a = -13 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

$$\underline{\underline{a = -0,13 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

$$F = m \cdot a$$

$$\underline{\underline{F = -0,52 \text{ N}}}$$

Aufgabe 22

Gegeben: $m = 500 \text{ g}; \quad c_1 = 20 \text{ N/m}; \quad c_2 = 30 \text{ N/m}; \quad \hat{s} = 10 \text{ cm}$

Aufgabe 22.1

Gesucht: T

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0,5 \text{ kg m s}^2}{(20 + 30) \text{ kg m}}}$$

$$\underline{\underline{T = 0,63 \text{ s}}}$$

Aufgabe 22.2

Gesucht: \hat{v}

$$\frac{1}{2}(c_1 + c_2) \cdot \hat{s}^2 = \frac{1}{2} m \cdot \hat{v}^2$$

$$\hat{v} = \hat{s} \cdot \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}$$

$$\hat{v} = 0,1 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{(20 + 30) \text{ kg} \cdot \text{m}}{0,5 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2}}$$

$$\underline{\underline{\hat{v} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Aufgabe 23

Gegeben: A ; l ; ρ ; g ; y_1

Gesucht: T

$$G = -\rho \cdot A \cdot g \cdot 2 \cdot y_1 = -D \cdot y_1$$

$$\Rightarrow D = \rho \cdot A \cdot g \cdot 2$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}; \quad \text{mit } m = \rho \cdot A \cdot l$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho \cdot A \cdot l}{\rho \cdot A \cdot g \cdot 2}}$$

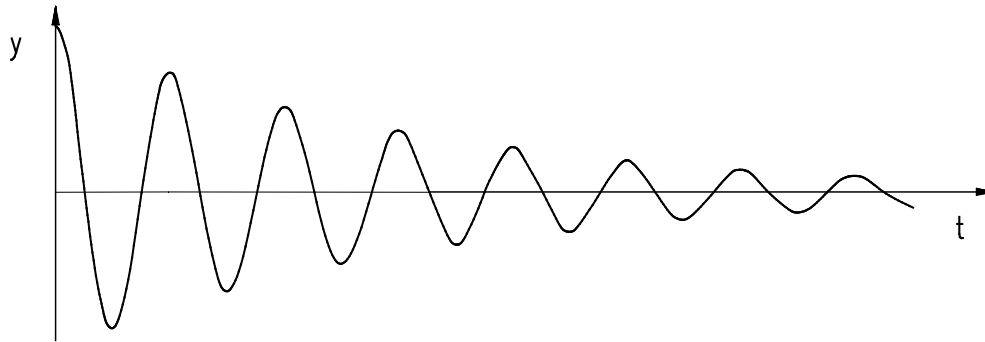
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2 \cdot g}}$$

Aufgabe 24

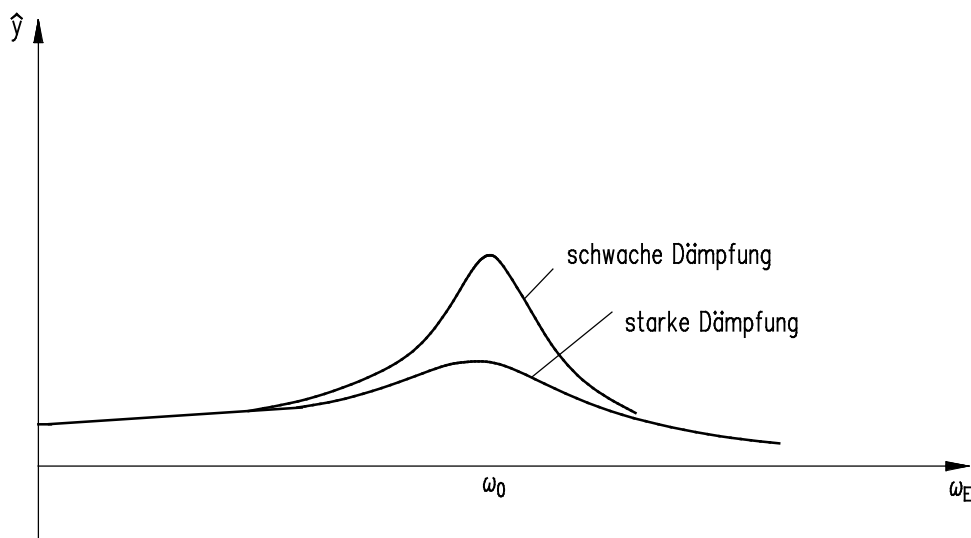
Bei einer freien Schwingung schwingt ein System ohne die Einwirkung von äußeren Kräften mit der Eigenfrequenz f_0 . Eine erzwungene Schwingung liegt vor, wenn ein System von einer äußeren periodisch veränderlichen Kraft zum Schwingen mit gleicher Frequenz gezwungen wird.

Aufgabe 25

Die Dämpfung bewirkt eine Reduzierung der Amplitude einer Schwingung. Aufgrund von Reibung wird ein Teil der Schwingungsenergie an die Umgebung abgegeben.

Aufgabe 26**Aufgabe 27**

Unter Resonanz versteht man das Auftreten maximaler Amplituden bei gekoppelten Schwingungen. Bei der Resonanz muss die Erregerfrequenz f_E mit der Eigenfrequenz f_0 des Systems übereinstimmen.

Aufgabe 28**Aufgabe 29**

Mitschwingen von Masten und Brücken bei Sturm; Vibrationen von Maschinenteilen bei bestimmten Frequenzen

2 Wellen**Aufgabe 1**

Lineare Wellen breiten sich über eine Kette gekoppelter Oszillatoren aus, wenn diese durch einen Erreger zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden. Der Impuls und die Energie werden dabei von einem Oszillator auf Grund der Kopplung auf den nächsten übertragen.

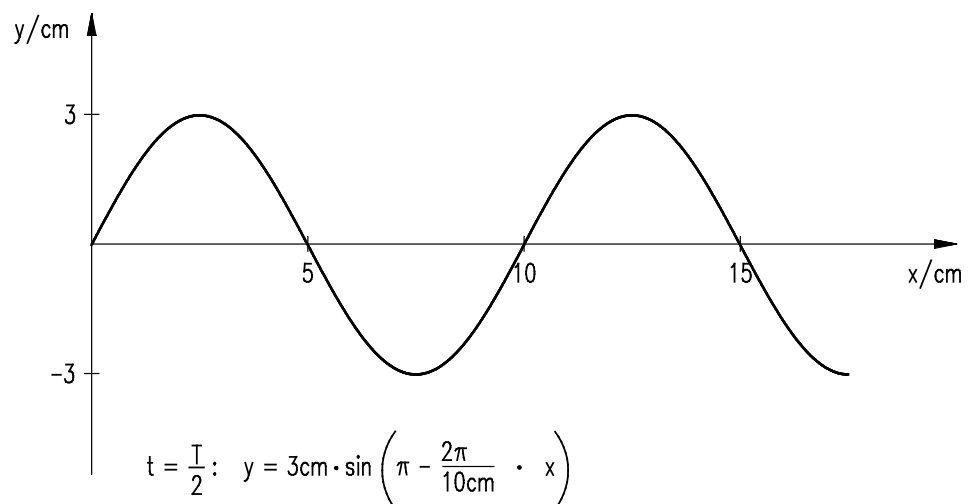
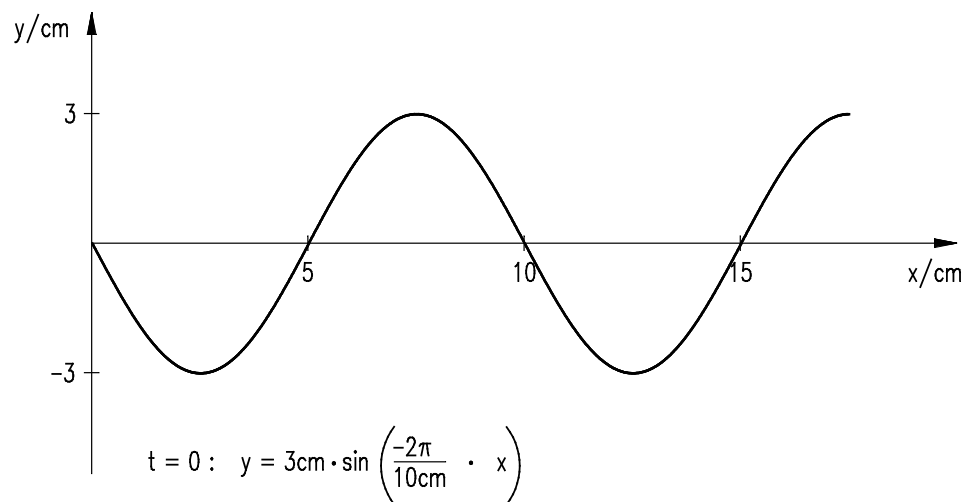
Aufgabe 2

Die Phasengeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Schwingungszustände bei einer Welle räumlich bewegen. Sie berechnet sich nach $c_p = \lambda \cdot f$.

Aufgabe 3

Die Wellengleichung gibt die Auslenkung $y(x, t)$ an der Stelle x einer linearen Oszillatorkette zur Zeit t an, die durch eine Welle hervorgerufen wird.

Aufgabe 4.1



Aufgabe 4.2

$$y(x; t) = 3 \text{ cm} \cdot \sin \left(2 \pi \cdot (1000 \text{ s}^{-1} \cdot t - \frac{x}{10 \text{ cm}}) \right)$$

$$y(4 \text{ cm}; 2 \text{ s}) = 3 \text{ cm} \cdot \sin \left(2 \pi \cdot (1000 \cdot 2 - \frac{4}{10}) \right)$$

$$y(4 \text{ cm}; 2 \text{ s}) = \underline{\underline{-1,77 \text{ cm}}}$$

Aufgabe 5

Bei der Transversalwelle stehen die Schwingungsvektoren der Oszillatoren senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle, bei den Longitudinalwellen liegen sie parallel.

Aufgabe 6

Ein Polarisator ist eine Vorrichtung, die beim Durchgang einer Transversalwelle nur eine definierte Schwingungsrichtung der Oszillatoren zulässt.

Aufgabe 7

Passiert eine Transversalwelle einen Polarisator und einen Analysator in gekreuzter Stellung, wird sie vollständig ausgelöscht. Auf Longitudinalwellen haben Polarisator und Analysator keinen Einfluss.

Aufgabe 8

Interferenz ist die ungestörte Überlagerung mehrerer Wellen auf einem Wellenträger. An jedem Ort addieren sich die momentanen Elongationen der einzelnen Wellen.

Aufgabe 9

Destruktive Interferenz ist die maximale Abschwächung (bei gleichen Amplituden auch Auslöschung) bei der Überlagerung zweier Wellen. Sie tritt auf bei einer Phasendifferenz von $\Delta\varphi = (2 \cdot n - 1) \cdot \pi$ oder dem Gangunterschied $\Delta s = (2 \cdot n - 1) \cdot \lambda / 2$, mit $n = 1, 2, 3, \dots$

Aufgabe 10

Beim Huygens'schen Prinzip wird jeder Punkt einer Wellenfront als Ausgangspunkt einer Elementarwelle betrachtet. Die Schwingung in einem Raumpunkt ergibt sich aus der Interferenz der Elementarwellen an diesem Punkt. Benachbarte Punkte gleicher Phase bilden die neue Wellenfront.

Aufgabe 11

Beim Übergang einer Welle von einem Medium in ein zweites Medium mit einer unterschiedlichen Phasengeschwindigkeit, wird die Ausbreitungsrichtung der Welle geändert. Es gilt:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_{p1}}{c_{p2}}$$

Aufgabe 12

Unter Beugung versteht man das Eindringen von Wellen in den geometrischen Schattenraum von Hindernissen.

Aufgabe 13

Überlagern sich zwei Wellen mit gleicher Frequenz, jedoch entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung, entsteht eine stehende Welle mit ortsfesten Knoten und Bäuchen. Zwischen den Bäuchen schwingen die Oszillatoren in gleicher Phase und Frequenz, jedoch mit unterschiedlichen Amplituden.

Aufgabe 14

Eigenschwingungen sind stehende Wellen auf endlichen Wellenträgern, die sich durch die Überlagerung von Ausgangswelle und reflektierter Welle ausbilden.

3 Schall**Aufgabe 1**

Unter Schall versteht man mechanische Wellen und Schwingungen in elastisch verformbaren Medien.

Aufgabe 2

Eine Schallquelle bewirkt erzwungene Schwingungen in seiner Umgebung, wodurch Energie auf die Umgebung übertragen wird.

Aufgabe 3

Unter Körperschall versteht man Schallausbreitung in festen Medien.

Aufgabe 4

Infraschall sind Schallwellen mit Frequenzen kleiner als der Hörschall, z.B. Erschütterungen durch den Verkehr.

Aufgabe 5

Nur Longitudinalwellen.

Aufgabe 6

Die Schallintensität ist die Schallenergie, die in 1 s auf eine 1 m² große Fläche wirkt.

Aufgabe 7

Der Schalldruck ist in der Akustik der Effektivwert des Schallwechseldruckes.

Aufgabe 8

Die Hörfläche ist im Schallintensität-Frequenz-Diagramm die Fläche zwischen den Kurven der Hörschwelle und der Schmerzgrenze. Töne dieser Frequenzen und Intensitäten werden vom Menschen wahrgenommen.

Aufgabe 9

Der Dopplereffekt beschreibt die Frequenzänderung eines Tones bei einer Relativbewegung zwischen Sender und Empfänger.

Aufgabe 10

Beim Klang stehen die sich überlagernden Frequenzen der Töne im Verhältnis ganzer Zahlen. Beim Geräusch sind die Frequenzverhältnisse beliebig.