

Funktionen und Gleichungen erster Ordnung einordnen und anwenden

Naturgesetze bestimmen die realen Zusammenhänge und Wirkungsweisen technischer Systeme. Häufig lassen sich diese Gesetzmäßigkeiten durch mathematische Modelle beschreiben.

Eine wichtige Modellgruppe bilden die linearen Funktionen, da mit ihrer Hilfe reale Situationen auf einfache Weise beschrieben bzw. angenähert werden können.

In ihrem Berufsfeld werden Technikerinnen und Techniker immer wieder damit konfrontiert, Gesetzmäßigkeiten in technischen Systemen zu erkennen.

Bei linearen Abhängigkeiten müssen sie daraus Funktionen bzw. Gleichungen erster Ordnung zur Lösung von Problemstellungen aufstellen und anwenden können, um mit diesen Instrumenten die Verhaltensweisen der realen Systeme darzustellen und vorherzusagen.

Aus diesen Gründen wird im Lernbereich 1 zunächst auf Zuordnungen und ihre Darstellungen eingegangen und anschließend im Lernbereich 2 die Funktion als eindeutige Zuordnung dargestellt.

Alle notwendigen Informationen und Arbeitsunterlagen sind in diesem Lernmodul enthalten.

Dieses Lernmodul ist im häuslichen Studium zu erarbeiten.

Der benötigte Zeitaufwand liegt bei ca. 24 Stunden.

Zusätzlich finden in den semesterbezogenen Präsenzphasen 11 Stunden Festigung und Vertiefung fachspezifischer und fächerübergreifender Zusammenhänge sowie die Beschreibung typischer Aufgaben und Problemstellungen statt.

LERNMODUL 2

Ziele

Ausgangssituation

Planung

**Komplexaufgabe
des Lernmoduls****Bestimmung einer Grenzstückzahl**

Eine Maschinenfabrik ist auf die Herstellung von Sondermaschinen für ihre Kunden spezialisiert. Von einem Kunden wird eine geringe Stückzahl einer neu zu entwickelnden Maschine geordert.

Für die Maschinenfabrik ist die Kalkulation des Verkaufspreises notwendig, um dem Kunden ein Angebot zu unterbreiten. Dazu spielen neben den Entwicklungskosten und den Produktionskosten noch die Menge der später verkauften Maschinen eine Rolle, da die Maschine eventuell für weitere Kunden in Frage kommt.

In diesem Lernmodul werden die erforderlichen Grundlagen zur erfolgreichen Bearbeitung dieses Projektes gelegt.

1 Zuordnungen und ihre Darstellungen	4
1.1 Tabelle, Graf und Koordinatensystem	4
1.2 Proportionale und antiproportionale Zuordnungen	7
1.3 Dreisatz bei proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen.....	14
1.4 Äquivalenzumformungen zum Lösen linearer Gleichungen und Ungleichungen	18
2 Funktionen als eindeutige Zuordnungen	33
2.1 Definitionsmenge und Wertemenge.....	33
2.2 Funktionen im Koordinatensystem.....	35
2.2.1 Funktion einer Geraden.....	39
2.2.2 Nullstellen einer Geraden und Schnittpunkt zweier Geraden	47
2.2.3 Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten	50
2.2.4 Umkehrfunktionen	65
Lösungsanhang	72

Inhaltsverzeichnis

Lernbereich

1 Zuordnungen und ihre Darstellungen

1.1 Tabelle, Graf und Koordinatensystem

In den verschiedensten Bereichen von Technik und Wirtschaft sowie im täglichen Leben begegnen uns ständig Tabellen und Schaubilder aller Art, die eine Beziehung zwischen den unterschiedlichsten Bereichen herstellen. Dazu einige Beispiele.

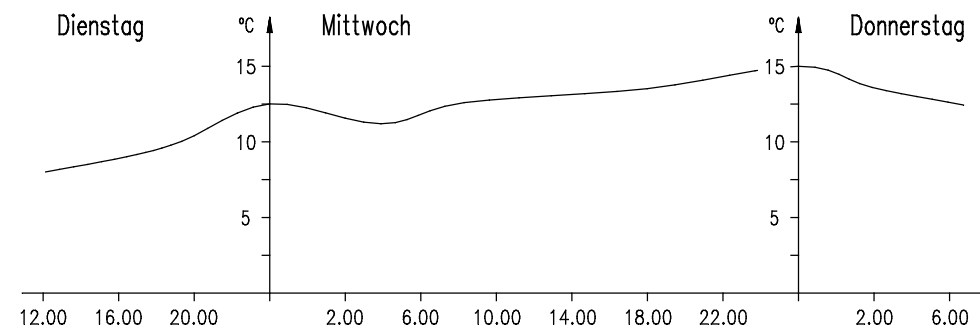


Abbildung 1 Temperaturkurve einer Wetterstation

Amerikanische Dollar			
\$	€	\$	€
1	1,08	0,10	0,108
2	2,16	0,20	0,216
3	3,24	0,30	0,324
4	4,32	⋮	⋮
⋮	⋮		

Tabelle 1 Währungstabelle

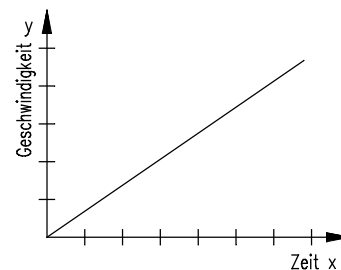


Abbildung 2 Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm

Diese Beziehungen werden in der Mathematik **Zuordnung** genannt. Um deutlich zu machen, welche Zahl oder **Größe** (Zahl mit Maßeinheit) einer anderen zugeordnet wird, werden verschiedene Darstellungsformen verwendet.

Lehrbeispiel 1

Ordnen Sie jedem Element der Menge M die Anzahl seiner Teiler zu!

$$M = \{2, 4, 8, 16, 24, 32\}$$

Lösung

Die Zuordnung wird in einem **Pfeildiagramm** deutlich gemacht.

Zahl → Anzahl ihrer Teiler

Als Teiler ergeben sich im Einzelnen:

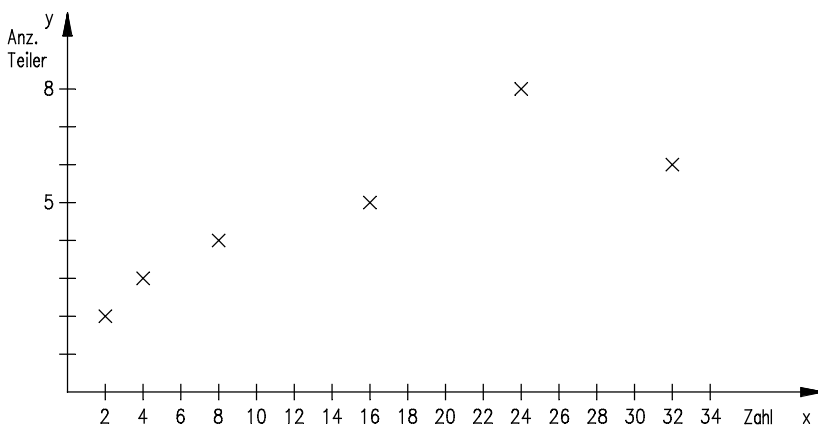
Teiler von 2:	1, 2	Anzahl: 2
Teiler von 4:	1, 2, 4	Anzahl: 3
Teiler von 8:	1, 2, 4, 8	Anzahl: 4
Teiler von 16:	1, 2, 4, 8, 16	Anzahl: 5

Teiler von 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 Anzahl: 8
 Teiler von 32: 1, 2, 4, 8, 16, 32 Anzahl: 6

Diese Aufstellung lässt sich übersichtlicher in einer **Tabelle** darstellen.

Zahl →	Anzahl ihrer Teiler
2	2
4	3
8	4
16	5
24	8
32	6

Werden wie im Beispiel Zahlen einander zugeordnet, so können diese einander zugeordneten **Zahlenpaare** als Punkte in einem **Koordinatensystem** dargestellt werden. Dabei ist es üblich, auf der waagerechten x-Achse die erste Spalte der Zuordnungstabelle, auf der senkrechten y-Achse die zweite Spalte abzutragen. Diese eingetragenen Punkte nennt man **Graf der Zuordnung**.



Solche Grafen können - je nach Zuordnung - sehr unterschiedlich sein.

Lehrbeispiel 2

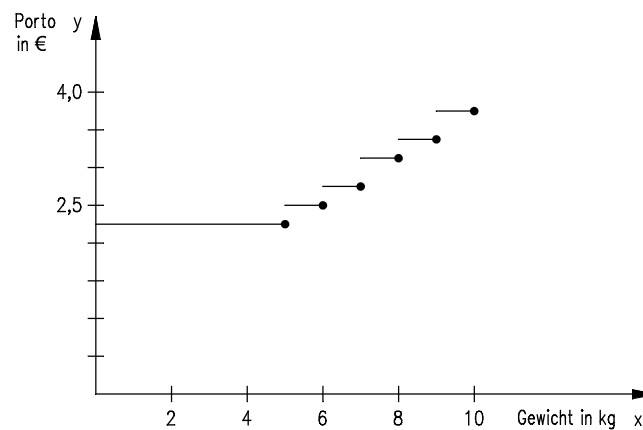
Legen Sie eine Tabelle an und zeichnen Sie den Grafen für folgende Zuordnung!

Gewicht in kg → Porto in €

Von 0 kg bis 5,000 kg : 2,25 €
 Von 5,001 kg bis 6,000 kg : 2,50 €
 Von 6,001 kg bis 7,000 kg : 2,75 €
 Von 7,001 kg bis 8,000 kg : 3,12 €
 Von 8,001 kg bis 9,000 kg : 3,38 €
 Von 9,001 kg bis 10,000 kg : 3,88 €

Lösung

Gewicht in kg →	Porto in €
bis 5	2,25
bis 6	2,50
bis 7	2,75
bis 8	3,12
bis 9	3,38
bis 10	3,88



Lehrbeispiel 3

Um die Güte von Schraubenfedern zu ermitteln, werden sie einer Dehnungsprüfung unterzogen. Dabei werden gleiche Massestücke an die Feder gehängt.

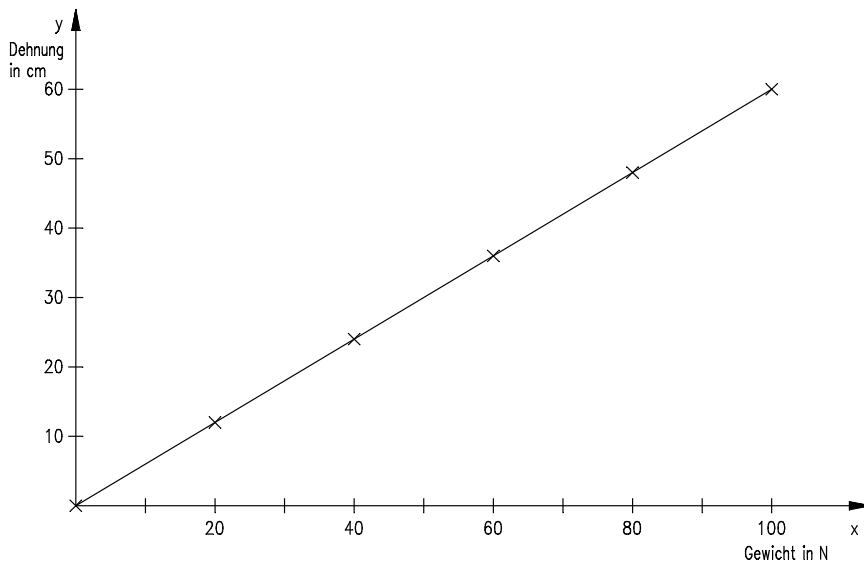
Geben Sie die Zuordnung an und zeichnen Sie den Grafen der Zuordnung!

Gewicht in N (Newton)	0	20	40	60	80	100
Dehnung in cm	0	12	24	36	48	60

Lösung

Einer angehängten Masse wird eine Dehnung zugeordnet:

Kraft in N →	Dehnung in cm
0	0
20	12
40	24
60	36
80	48
100	60



Nachdem die Wertepaare der Tabelle zunächst als Punkte in das Koordinatensystem eingetragen worden sind, stellt sich die Frage, ob es zwischen den Messwerten auch sinnvolle (und stimmige) Wertepaare gibt. Dies wird nach eingehender Überlegung bestätigt. Allerdings muss der Graf im Punkt (100/60) enden, da keine Aussage über den Bereich vorliegt, der größer ist als die angegebene Belastung.

1.2 Proportionale und antiproportionale Zuordnungen

Lehrbeispiel 1

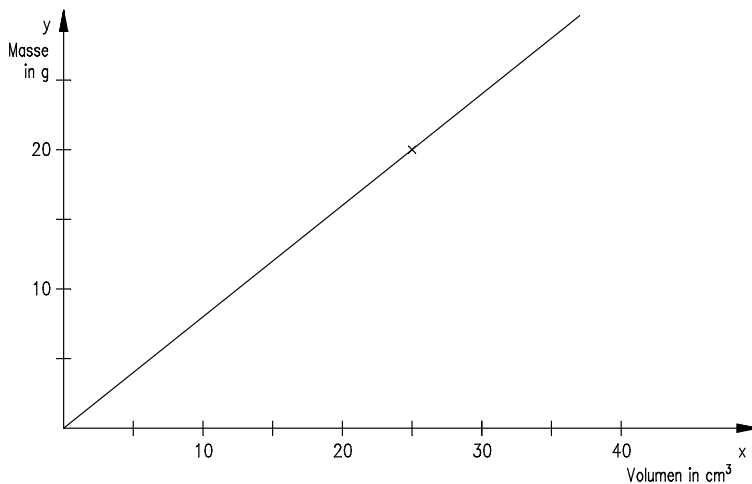
Ein Holzwürfel mit einem Volumen von 25 cm^3 hat eine Masse von 20 g.

Geben Sie die Zuordnung an und zeichnen Sie den Grafen der Zuordnung!

Lösung

Einem Volumen von 25 cm^3 wird eine Masse von 20 g zugeordnet.

Volumen in $\text{cm}^3 \rightarrow$ Masse in g



Der Graf der Zuordnung Volumen \rightarrow Masse lässt sich mithilfe von zwei Wertepaaren zeichnen.

1. Ist kein Volumen vorhanden, existiert keine Masse: (0;0)
2. Die gegebenen Werte bilden das zweite Wertepaar: (25;20)

Da bei dem Holzwürfel von einer gleichmäßigen Materialverteilung auszugehen ist, kann zwischen den beiden Wertepaaren und über das Wertepaar (25;20) hinaus eine Halbgerade gezeichnet werden.

Alle Punkte der Halbgeraden sind Wertepaare der Zuordnung. Somit lässt sich z.B. folgende Tabelle erstellen:

Volumen in cm^3	Masse in g
10	8
20	16
25	20
30	24
40	32
50	40

Volumen \rightarrow Masse
 doppeltes Volumen \rightarrow doppelte Masse
 Hälfte des Volumens \rightarrow Hälfte der Masse

Diese Zuordnung ist **proportional**.

Der Graf einer proportionalen Zuordnung ist eine Gerade, die durch den Ursprung (0;0) des Koordinatensystems geht.

Lehrbeispiel 2

Ein Fahrzeug bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v . Gegeben ist der zurückgelegte Weg s von 540 km nach einer Fahrzeit von $t = 6$ h.

Ergänzen Sie die Zuordnungstabelle!

Lösung

Zeit in h \rightarrow Weg in km

h	km
6	540
3	270
2	180
5	450
7	630

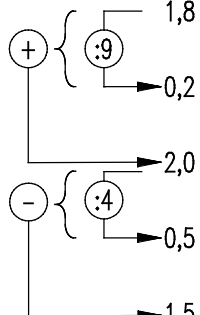
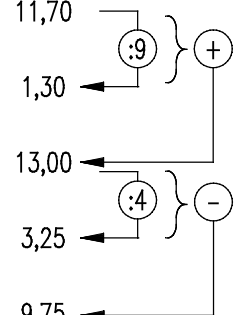
Lehrbeispiel 3

Ein Produkt kostet für 1,8 kg einen Betrag von 11,70 €.

Die Zuordnung Gewicht \rightarrow Preis ist proportional.

Ergänzen Sie die Tabelle!

Lösung

Gewicht in kg	Preis in €
	
1,8	11,70
0,2	1,30
2,0	13,00
0,5	3,25
1,5	9,75

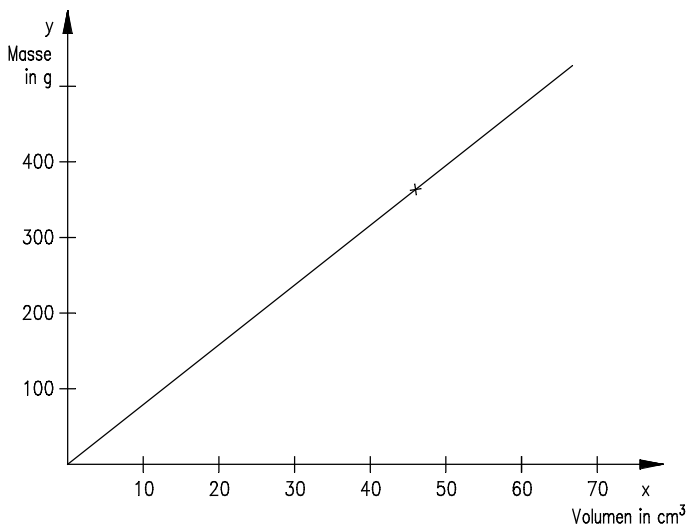
Additionsregel/Subtraktionsregel

Bei proportionalen Zuordnungen darf auf beiden Seiten der Tabelle entweder addiert oder subtrahiert werden.

Lehrbeispiel 4

Ein Eisenquader hat ein Volumen von 46 cm^3 . Er hat eine Masse von 363,4 g.

Zeichnen Sie den Grafen der Zuordnung! Tragen Sie vier weitere Wertepaare in eine Tabelle ein!

Lösung

Volumen in cm^3	Masse in g
46	363,4
20	158
10	79
5	39,5
30	237

Wenn nun jeweils der Quotient aus dem y-Wert und dem zugehörigen x-Wert gebildet wird, ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{array}{llll}
 (46;363,4) & 363,4 : 46 = 7,9 & (20;158) & 158 : 20 = 7,9 \\
 (30;237) & 237 : 30 = 7,9 & (10;79) & 79 : 10 = 7,9 \\
 (5;39,5) & 39,5 : 5 = 7,9 & &
 \end{array}$$

Volumen \rightarrow Masse

V in cm ³	m in g	Masse : Volumen (g/cm ³)
20	15	15 : 20 = 0,75
40	30	30 : 40 = 0,75
100	75	75 : 100 = 0,75

Die Zahlenpaare (20;15); (40;30); (100;75) sind quotientengleich. Sie haben alle den selben Proportionalitätsfaktor $k = 0,75$.

k gibt hier die Masse (0,75 g) pro cm³ Volumen an.

Lehrbeispiel 5

Bestimmen Sie den Proportionalitätsfaktor k ! Zeichnen Sie den Grafen der Zuordnung: 80 Hohlblocksteine haben eine Masse von 440 kg.

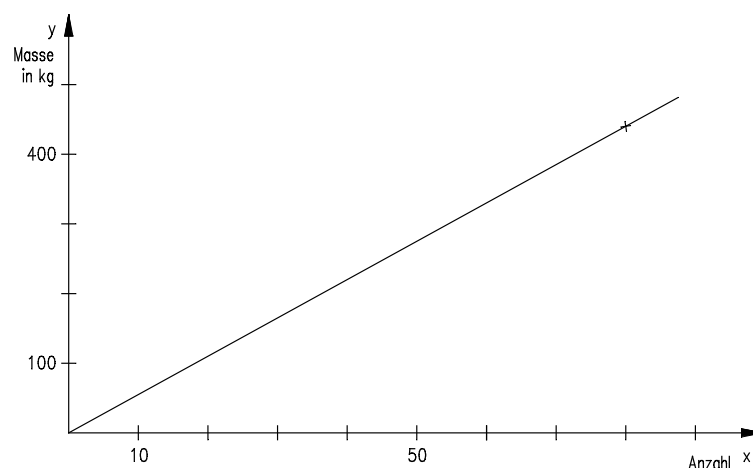
Lösung

Die Zuordnung wird durch folgendes Pfeildiagramm beschrieben:

Anzahl der Steine \rightarrow Masse in kg
80 440

Proportionalitätsfaktor $k = 440 : 80 = 5,5$

Antwort: Der Proportionalitätsfaktor $k = 5,5$ gibt an, wie viel kg Masse ein Hohlblockstein hat.



Lehrbeispiel 6

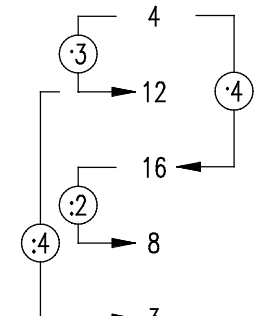
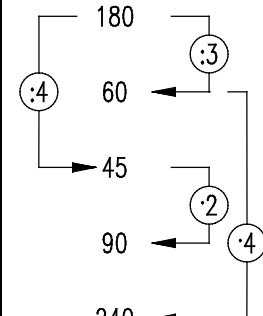
Vier Pumpen füllen ein Wasserbecken in 180 Minuten.

Wie viele Pumpen müssen eingesetzt werden, wenn das Becken in 60 min (45 min, 90 min, 240 min) gefüllt werden soll?

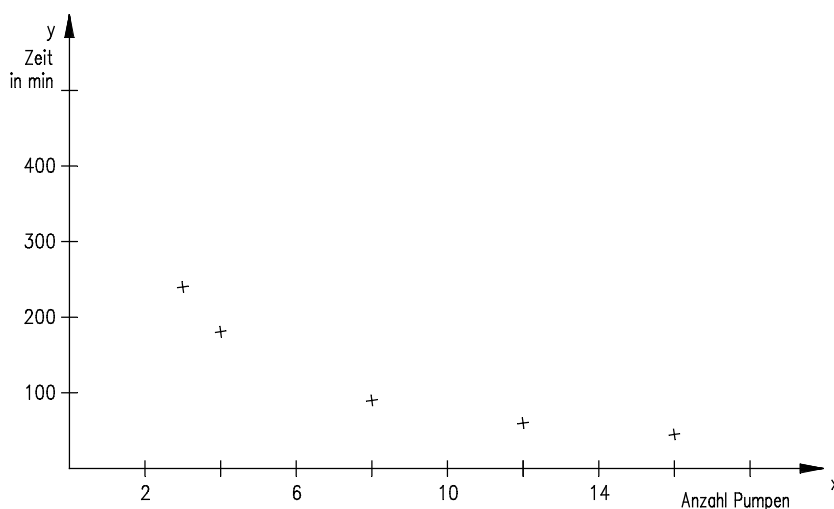
Legen Sie eine Tabelle an und zeichnen Sie den Grafen der Zuordnung!

Lösung

Einer Anzahl von 4 Pumpen wird eine Zeit von 180 min zugeordnet.

Anzahl der Pumpen	Zeit in min
	

Auf Grund der Wertepaare lässt sich die Aussage treffen, dass eine kleinere Anzahl von Pumpen eine längere Füllzeit, eine größere Zahl von Pumpen eine kürzere Füllzeit bedingen. Dann wird der Graf auch verständlich.



Diese Zuordnung ist **antiproportional**. Die benachbarten Punkte dürfen im Koordinatensystem nicht durch Strecken verbunden werden. Die Punkte liegen alle auf einer Kurve, die **Hyperbel** heißt.

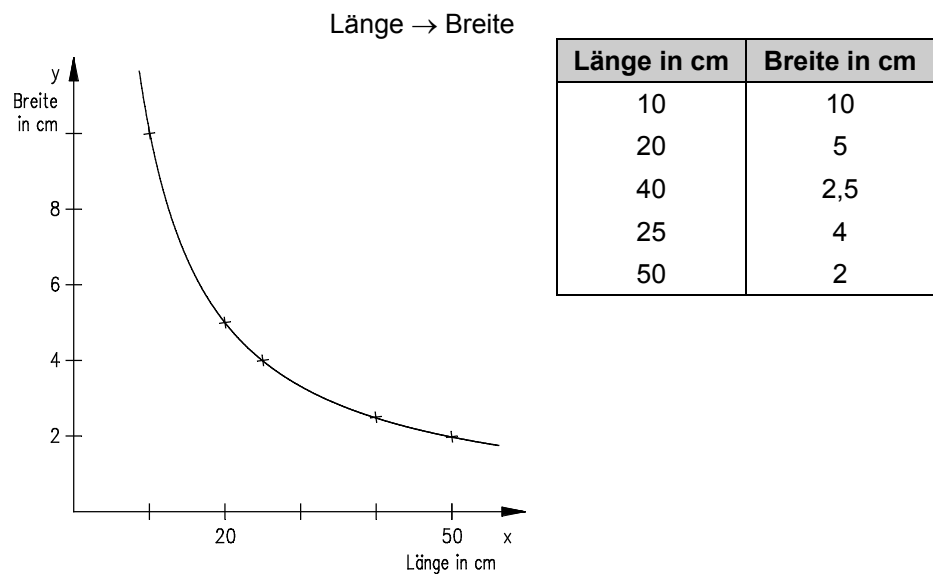
Lehrbeispiel 7

Ein Rechteck hat einen Flächeninhalt von 100 cm^2 .

Bestimmen Sie fünf Wertepaare möglicher Seitenlängen und tragen diese in eine Tabelle ein! Zeichnen Sie den Grafen der Zuordnung!

Lösung

Die Zuordnung wird durch folgendes Pfeildiagramm beschrieben:



Wenn nun jeweils das Produkt aus dem y-Wert und dem zugehörigen x-Wert gebildet wird, ergeben sich folgende Werte:

(10;10)	$10 \cdot 10 = 100$	(20;5)	$20 \cdot 5 = 100$
(40;2,5)	$40 \cdot 2,5 = 100$	(25;4)	$25 \cdot 4 = 100$
(50;2)	$50 \cdot 2 = 100$		

Proportionalitätskonstante

Länge (cm)	Breite (cm)	Länge \cdot Breite (cm^2)
10	2	$10 \cdot 2 = 20$
5	4	$5 \cdot 4 = 20$
20	1	$20 \cdot 1 = 20$
4	5	$4 \cdot 5 = 20$

Die Zahlenpaare (10;2), (5;4), (20;1), (4;5) sind **produktgleich**. Sie haben alle dieselbe **Proportionalitätskonstante c**.

$c = 20$ gibt hier den Flächeninhalt eines Rechtecks an.

Lehrbeispiel 8

Bestimmen Sie die Proportionalitätskonstante c ! Zeichnen Sie den Grafen der Zuordnung: Mit vier Maschinen wird ein Produktionsauftrag in 4,5 Stunden erfüllt!

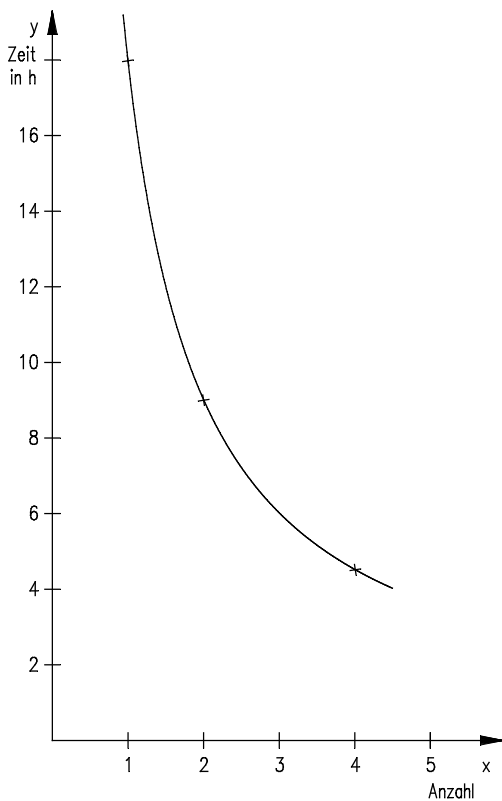
Lösung

Die Zuordnung wird durch folgendes Pfeildiagramm beschrieben:

Anzahl der Maschinen \rightarrow benötigte Zeit
4 4,5

Proportionalitätskonstante: $c = 4 \cdot 4,5 = 18$

Die Proportionalitätskonstante c gibt hier die Gesamtmenge der benötigten Maschinenstunden an.



1.3 Dreisatz bei proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen

Lehrbeispiel 1

Bei Umbauarbeiten wird festgestellt, dass statt der gelieferten 24 m² Fliesen 7 m² mehr benötigt werden.

Berechnen Sie die Mehrkosten, wenn 24 m² 840 € kosten!

Lösung

24 m² kosten 840 €
7 m² kosten x €

Menge in m ²	Preis in €
24	840
1	35
7	245

24 m² kosten 840 €
1 m² kostet 840 € : 24 = 35 €
7 m² kosten 35 € · 7 = 245 €

Antwort: Die Mehrkosten betragen 245 €.

Wie im Lehrbeispiel zu sehen ist, sind drei Lösungsschritte durchgeführt worden. Diese Lösungsschritte können in einem Lösungsterm zusammengeführt werden:

$$x = (840 : 24) \cdot 7 \text{ €}$$

$$x = 245 \text{ €}$$

Lehrbeispiel 2

Der Hausgrundriss einer Architektenzeichnung ist im Maßstab 1:100 angefertigt worden.

Bestimmen Sie die wirklichen Maße eines Raumes, der mit 4,5 cm Länge gezeichnet wurde!

Lösung

Der Maßstab der Zeichnung gibt an, welche Strecke in der Wirklichkeit 1 cm in der Zeichnung entspricht.

Zeichnung in cm	→	Wirklichkeit in cm
1		100
4,5		x

$$x = (100 : 1) \cdot 4,5$$

$$x = 450 \text{ cm}$$

Antwort: Der Raum ist in Wirklichkeit 4,50 m lang.

Lehrbeispiel 3

Ein Elektrogerät verursacht in 15 Minuten Energiekosten in Höhe von 0,18 €.

Berechnen Sie den Proportionalitätsfaktor k und geben Sie die Zuordnungsvorschrift an! Berechnen Sie die Energiekosten, die in 54 Minuten entstehen!

Lösung

In 15 min entstehen Kosten von 0,18 €.

In 54 min entstehen Kosten von x €.

Zeit in min	Kosten in €	
15	0,18	$x = (0,18 : 15) \cdot 54$
1	0,012	$x = 0,648 \text{ €}$
54	0,648	

Antwort: Es entstehen Kosten von 0,65 €.

Der Proportionalitätsfaktor k berechnet sich aus: $k = 0,18 : 15 = 0,012$.

k gibt an, wie hoch die Energiekosten pro Minute sind.

Somit lässt sich folgender Zusammenhang formulieren: Jeder beliebigen Zeit x wird das 0,012fache zugeordnet.

$$x \rightarrow 0,012 \cdot x$$

Hieraus leiten wir die **allgemeine Zuordnungsvorschrift für den Dreisatz bei proportionalen Zuordnungen** ab:

$$x \rightarrow k \cdot x$$

Lehrbeispiel 4

Ein Passagierflugzeug verbraucht in drei Flugstunden etwa 600 Liter Kerosin.

Bestimmen Sie k und geben Sie die Zuordnungsvorschrift an! Berechnen Sie den Kerosinverbrauch für 5 1/2 h Flugzeit!

Lösung

Flugzeit in h	Kerosinverbrauch in l	
3	600	
1	200	$k = 600 : 3 = 200$

$$x \rightarrow k \cdot x$$

$$x \rightarrow 200 \cdot x$$

Verbrauch in 5 1/2 h Flugzeit: $200 \cdot 5,5 = 1100$

Antwort: Das Flugzeug verbraucht in 5 1/2 h Flugzeit etwa 1100 Liter Kerosin.

Lehrbeispiel 5

Ein Klärbecken kann mit drei gleich starken Pumpen in 3 h 20 min geleert werden.

Berechnen Sie die benötigte Zeit, wenn zu Beginn eine vierte Pumpe angeschlossen wird!

Lösung

3 Pumpen benötigen 3 h 20 min.

4 Pumpen benötigen x h.

Anzahl der Pumpen	Zeit in h	
3	3 1/3	Drei Pumpen benötigen 3 1/3 h.
1	10	Eine Pumpe benötigt 10 h.
4	2 1/2	Vier Pumpen benötigen 2 1/2 h.

Antwort: Vier Pumpen benötigen 2 1/2 h.

Die drei Lösungsschritte können zu einem Lösungsterm zusammengeführt werden:

$$x = (3 \frac{1}{3} \cdot 3) : 4$$

$$x = 2 \frac{1}{2}$$

Lehrbeispiel 6

Fünf Maschinen verpacken die Tagesproduktion in 6 h.

Berechnen Sie, welche Zeit benötigt wird, wenn zu Beginn zwei Maschinen ausfallen!

Lösung

5 Maschinen benötigen 6 h.

3 Maschinen benötigen x h.

$$x = (6 \cdot 5) : 3$$

$$x = 10$$

Antwort: 3 Maschinen benötigen 10 h.

Lehrbeispiel 7

Ein Arbeitnehmer benötigt mit seinem PKW bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 40 km pro Stunde für den Weg zum Arbeitsplatz 30 min.

Berechnen Sie die Proportionalitätskonstante c und geben Sie die Zuordnungsvorschrift an! Berechnen Sie die Fahrzeit, wenn die Durchschnittsgeschwindigkeit nur 25 km/h beträgt!

Lösung

40 km/h → 30 min

25 km/h → x min

Geschwindigkeit in km/h	Zeit in min	
40	30	$x = (30 \cdot 40) : 25$
1	1200	$x = 48 \text{ min}$
25	48	

Antwort: Die Fahrzeit beträgt 48 min.

Die Proportionalitätskonstante c berechnet sich aus:

$$c = 40 \cdot 30 = 1200$$

c gibt an, welche Zeit bei einer Geschwindigkeit von 1 km/h benötigt wird.

Somit lässt sich folgender Zusammenhang formulieren:

Jeder beliebigen Geschwindigkeit x wird der Quotient c/x zugeordnet.

$$x \rightarrow \frac{1200}{x}$$

Hieraus leiten wir die **allgemeine Zuordnungsvorschrift für den Dreisatz bei anti-proportionalen Zuordnungen** ab:

$$x \rightarrow \frac{c}{x}$$

Lehrbeispiel 8

Ein Holzwürfel (Dichte = $0,5 \text{ g/cm}^3$) hat ein Volumen von 1000 cm^3 .

Berechnen Sie die Proportionalitätskonstante und geben Sie die Zuordnungsvorschrift an! Berechnen Sie das Volumen eines gleich schweren Würfels aus Glas (Dichte = $2,6 \text{ g/cm}^3$)!

Lösung

Dichte in g/cm^3	Volumen in cm^3
0,5	1000
1	500

$$c = 0,5 \cdot 1000 = 500$$

$$x \rightarrow \frac{c}{x} \quad x \rightarrow \frac{500}{x}$$

$$\text{Volumen bei einer Dichte von } 2,6 \text{ g/cm}^3: \frac{500}{2,6} = 192,3 \text{ cm}^3$$

Antwort: Der Glaswürfel hat ein Volumen von $192,3 \text{ cm}^3$.

Lehrbeispiel 9

Vier Maschinen können zusammen in drei Stunden 84000 Schrauben produzieren.

Welche Stückzahl kann von drei Maschinen in acht Stunden produziert werden?

Lösung

In dieser Aufgabenstellung werden drei Größen durch eine Zuordnung miteinander verknüpft.

Anzahl der Maschinen → Zeit → Stückzahl

Zur Lösung eignen sich sowohl die Zuordnungstabelle als auch das Pfeildiagramm. Wichtig ist dabei, dass **bei jedem Rechenschritt eine Größe unverändert** bleibt.

Anzahl der Maschinen	Zeit in h	Stückzahl	
4	3	84000	4 Maschinen → 3 h → 84000 Stück
1	12	84000	1 Maschine → 12 h → 84000 Stück
1	1	7000	1 Maschine → 1 h → 7000 Stück
3	1	21000	3 Maschinen → 1 h → 21000 Stück
3	8	168000	3 Maschinen → 8 h → 168000 Stück

Antwort: 3 Maschinen können in 8 Stunden 168000 Schrauben produzieren.

1.4 Äquivalenzumformungen zum Lösen linearer Gleichungen und Ungleichungen

Der Satz: „Köln liegt am Rhein“ ist wahr (w). Der Satz: „2,5 ist eine ganze Zahl“ ist falsch (f).

Beide Sätze sind Aussagen. Aussagen sind Sätze, die entweder wahr (w) oder falsch (f) sind.

Lehrbeispiel 1

Bilden Sie jeweils eine wahre und falsche Aussage, indem Sie die Variable ersetzen!

x ist durch 4 und 3 teilbar.

Lösung

Der Satz: „x ist durch 4 und 3 teilbar“ ist eine **Aussageform**. Durch Ersetzen der Variablen geht eine Aussageform in eine Aussage über.

12 ist durch 4 und 3 teilbar. (w)

15 ist durch 4 und 3 teilbar. (f)

Lehrbeispiel 2

Geben Sie aus der vorgegebenen Menge G alle Elemente an, die beim Einsetzen die Aussageform in eine wahre Aussage überführen. Fassen Sie alle diese Elemente in der Lösungsmenge L zusammen!

Aussageform: $4 \cdot x > 15$

$G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Lösung

Jedes Element der Grundmenge wird in die Aussageform eingesetzt und daraufhin überprüft, ob eine wahre Aussage entsteht.

$$4 \cdot \boxed{0} > 15 \text{ (f)} \quad 4 \cdot \boxed{1} > 15 \text{ (f)} \quad 4 \cdot \boxed{2} > 15 \text{ (f)}$$

$$4 \cdot \boxed{3} > 15 \text{ (f)} \quad 4 \cdot \boxed{4} > 15 \text{ (w)} \quad 4 \cdot \boxed{5} > 15 \text{ (w)}$$

Bei zwei Einsetzungen für die Variable x (4, 5) entsteht eine wahre Aussage. Somit ergibt sich die Lösungsmenge $L = \{4, 5\}$.

Die Lösungsmenge L ist eine **Teilmenge** der Grundmenge G ($L \subset G$).

Aussageformen**Aussagen**

$$3x = 30$$

$$3 \cdot \boxed{10} = 30 \text{ (w)}$$

$$5 + x = 10$$

$$5 + \boxed{5} = 10 \text{ (w)}$$

$$2x - 1 = 23$$

$$2 \cdot \boxed{15} - 1 = 23 \text{ (f)}$$

Eine Gleichung entsteht, wenn zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen verbunden werden. Die Grundmenge ist - falls nicht anders angegeben - $G = \mathbb{R}$.

Lehrbeispiel 3

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge!

$$2x + 3 = x \quad G = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$x + 4 = x + 4 \quad G = \{0, 1, 2, 3\}$$

Lösung

$$2 \cdot \boxed{0} + 3 = \boxed{0} \text{ (f)}$$

$$\boxed{0} + 4 = \boxed{0} + 4 \text{ (w)}$$

$$2 \cdot \boxed{1} + 3 = \boxed{1} \text{ (f)}$$

$$\boxed{1} + 4 = \boxed{1} + 4 \text{ (w)}$$

$$2 \cdot \boxed{2} + 3 = \boxed{2} \text{ (f)}$$

$$\boxed{2} + 4 = \boxed{2} + 4 \text{ (w)}$$

$$2 \cdot \boxed{3} + 3 = \boxed{3} \text{ (f)}$$

$$\boxed{3} + 4 = \boxed{3} + 4 \text{ (w)}$$

Antwort: Im 1. Fall ist keine Zahl der Grundmenge Lösung der Gleichung. Diese Gleichung heißt **nicht erfüllbar über der Grundmenge G : $L = \{\}$** .

Im 2. Fall ist jede Zahl der Grundmenge Lösung der Gleichung. Diese Gleichung heißt **allgemein gültig über der Grundmenge G : $L = G$** .

Werden die beiden Aussageformen $x - 10 = 5$ und $x = 15$ betrachtet, so wird beim Einsetzen einer beliebigen Zahl x deutlich, dass beide Aussageformen dieselbe Lösungsmenge haben. Durch Umformen der Aussageform $x - 10 = 5$ lässt sich die Aussageform $x = 15$ erhalten.

$$\begin{aligned} x - 10 &= 5 \\ x - 10 \boxed{+ 10} &= 5 \boxed{+ 10} \\ x &= 15 \\ L &= \{15\} \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge bleibt unverändert, wenn auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Zahl addiert oder subtrahiert wird.

$$\begin{aligned} x + 5 &= 7 \\ x + 5 \boxed{- 5} &= 7 \boxed{- 5} \\ x &= 2 \\ L &= \{2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 8 &= 15 \\ x - 8 + 8 &= 15 + 8 \\ x &= 23 \\ L &= \{23\} \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 4

Zeigen Sie, dass die beiden Aussageformen dieselbe Lösungsmenge haben!

$$3x = 12 \quad \text{und} \quad x = 4$$

Lösung

$$\begin{aligned} 3x &= 12 & | : 3 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{12}{3} \\ x &= 4 & x = 4 \\ L &= \{4\} & L = \{4\} \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge bleibt unverändert, wenn auf beiden Seiten der Gleichung mit derselben Zahl ($\neq 0$) multipliziert oder durch dieselbe Zahl ($\neq 0$) dividiert wird.

$$\begin{aligned} 5x &= 40 & | : 5 \\ \frac{5x}{5} &= \frac{40}{5} \\ x &= 8 \\ L &= \{8\} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}x &= 2 & | \cdot 2 \\ \frac{1}{2}x \cdot 2 &= 2 \cdot 2 \\ x &= 4 \\ L &= \{4\} \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 5

Bestimmen Sie die Lösungsmenge!

$$8x + 4 = 20$$

Lösung

Um die Lösungsvariable x zu isolieren, muss die Gleichung zunächst so umgeformt werden, dass der Zahlenterm (4) nicht mehr auf der linken Seite der Gleichung erscheint.

$$\begin{array}{lcl} 8x + 4 = 20 & | -4 & \\ 8x = 16 & | : 8 & \\ x = 2 & & \\ L = \{2\} & & \end{array}$$

Zur Überprüfung der Lösungsmenge wird eine **Probe** durchgeführt. Dafür werden für die Variable die Elemente der Lösungsmenge eingesetzt. Dabei muss die Aussageform in eine wahre Aussage übergehen.

Probe:

$$\begin{array}{l} 8x + 4 = 20 \\ 8 \cdot \boxed{2} + 4 = 20 \\ 16 + 4 = 20 \\ 20 = 20 \quad (\text{w}) \end{array}$$

Lehrbeispiel 6

Bestimmen Sie die Lösungsmenge!

$$3 - [2(x + 2) + 4x - 4] = 2(4x + 1)$$

Lösung

Zunächst werden die Terme auf der linken und rechten Seite jeweils vereinfacht.

$$\begin{array}{l} 3 - [2x + 4 + 4x - 4] = 8x + 2 \\ 3 - [\quad \quad 6x \quad \quad] = 8x + 2 \\ 3 - 6x = 8x + 2 \end{array}$$

Es ist üblich, die **Lösungsvariable** (hier: x) auf der linken Seite der Gleichung zu isolieren.

Da Variablen Platzhalter für reelle Zahlen sind, ist auch die Addition bzw. Subtraktion eines Variablenterms auf beiden Seiten der Gleichung eine Äquivalenzumformung.

$$\begin{aligned}
 3 - 6x &= 8x + 2 & | -8x \\
 3 - 14x &= 2 & | -3 \\
 -14x &= -1 & | :(-14) \\
 x &= 1/14 \\
 L &= \{1/14\}
 \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}
 3 - [2(x + 2) + 4x - 4] &= 2(4x + 1) \\
 3 - [2(\frac{1}{14} + 2) + 4 \cdot \frac{1}{14} - 4] &= 2(4 \cdot \frac{1}{14} + 1) \\
 3 - [\frac{2}{14} + 4 + 4 \cdot \frac{1}{14} - 4] &= 2\left(4 \cdot \frac{1}{14} + 1\right) \\
 3 - \frac{6}{14} &= 2 \frac{8}{14} \\
 2 \frac{8}{14} &= 2 \frac{8}{14} \quad (w)
 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 7

Bestimmen Sie die Lösungsmenge!

$$(x - 1)^2 + (x + 2)^2 = (x - 1)(x + 1) + (x - 2)^2$$

Lösung

$$\begin{aligned}
 (x - 1)^2 + (x + 2)^2 &= (x - 1)(x + 1) + (x - 2)^2 \\
 x^2 - 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 &= x^2 - 1 + x^2 - 4x + 4
 \end{aligned}$$

Alle gleichartigen Terme werden zusammengefasst.

$$2x^2 + 2x + 5 = 2x^2 - 4x + 3$$

Wenn auf beiden Seiten einer Gleichung derselbe Term steht (**einschließlich Vorzeichen**) so kann dieser Term gestrichen werden.

$$\begin{aligned}
 2x + 5 &= -4x + 3 & | + 4x \\
 6x + 5 &= + 3 & | - 5 \\
 6x &= -2 & | : 6 \\
 x &= -2/6 = -1/3 \\
 L &= \{-1/3\}
 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 8

Bestimmen Sie die Lösungsmenge!

$$\frac{2(x - 1)}{3} + \frac{3(x - 4)}{5} - 13 = 27$$

Lösung

Zunächst muss der Hauptnenner bestimmt werden. Anschließend wird die gesamte Gleichung (**alle Terme**) mit dem Hauptnenner multipliziert.

HN.: 15

$$\begin{aligned} \frac{2(x-1) \cdot 15}{3} + \frac{3(x-4) \cdot 15}{5} - 13 \cdot 15 &= 27 \cdot 15 \\ 10x - 10 + 9x - 36 - 195 &= 405 \\ 19x - 241 &= 405 & | +241 \\ 19x &= 646 & | : 19 \\ x &= 34 \\ L &= \{34\} \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 9

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $2ax + 3b = 4c$!

Lösung

In einer Gleichung, in der außer der Variablen x noch andere Variablen vorkommen, heißt x die **Lösungsvariable**. Die anderen Variablen heißen **Formvariablen**. Sie sind Platzhalter für reelle Zahlen. Bei der Division durch eine Variable darf diese nicht den Wert Null annehmen.

$$\begin{aligned} 2ax + 3b &= 4c & | -3b \\ 2ax &= 4c - 3b & | : 2a & \quad L = \left\{ \frac{4c - 3b}{2a} \right\} & \quad a \neq 0 \\ x &= \frac{4c - 3b}{2a} \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 10

Bestimmen Sie die Definitionsmenge! Geben Sie die Lösungsmenge an!

$$\frac{12}{x-4} = \frac{8}{x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$$

Lösung

HN.: $(x-4)x$

$$\begin{aligned} \frac{12}{x-4} &= \frac{8}{x} \\ \frac{12(x-4)x}{x-4} &= \frac{8(x-4)x}{x} \\ 12x &= 8x - 32 & | -8x \\ 4x &= -32 & | : 4 \\ x &= -8 \\ L &= \{-8\} \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 11

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Bruchgleichung! Geben Sie zunächst die Definitionsmenge an!

$$\frac{3}{4-2x} + \frac{15}{4-4x} = \frac{3}{2-x} + \frac{5}{2-2x}$$

Lösung

Zunächst müssen die Nenner so weit wie möglich faktorisiert werden, d.h. in Faktoren zerlegt werden!

$$\begin{aligned} 4-2x &= 2(2-x) \\ 4-4x &= 2 \cdot 2(1-x) \\ 2-x &= (2-x) \\ \underline{2-2x} &= 2(1-x) \\ \text{HN.:} &= 2 \cdot 2(2-x)(1-x) \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Definitionsmenge werden die Nenner Null gesetzt.

$$\begin{aligned} 2(2-x) &= 0 & 4(1-x) &= 0 \\ 2-x &= 0 & 1-x &= 0 \\ x &= 2 & x &= 1 & D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3(2-x)(1-x)4}{2(2-x)} + \frac{15(2-x)(1-x)4}{4(1-x)} &= \frac{3(2-x)(1-x)4}{2-x} + \frac{5(2-x)(1-x)4}{2(1-x)} \\ 6(1-x) + 15(2-x) &= 12(1-x) + 10(2-x) \\ 6-6x+30-15x &= 12-12x+20-10x \\ -21x+36 &= -22x+32 & | +22x \\ x+36 &= 32 & | -36 \\ x &= -4 \\ L &= \{-4\} \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 12

Lösen Sie die Bruchgleichung!

$$\frac{1}{x+6} + \frac{1}{x-6} = \frac{12}{x^2-36}$$

Lösung

HN.:

$$\begin{aligned} x+6 &= (x+6) \\ x-6 &= (x-6) \\ \underline{x^2-36} &= (x+6)(x-6) \\ \text{HN.:} &= (x+6)(x-6) \end{aligned}$$

Definitionsmenge D:

$$\begin{aligned}
 x + 6 &= 0 & x - 6 &= 0 \\
 x &= -6 & x &= 6 & D &= \mathbb{R} \setminus \{-6; 6\} \\
 \frac{1(x+6)(x-6)}{x+6} + \frac{1(x+6)(x-6)}{x-6} &= \frac{12(x+6)(x-6)}{(x+6)(x-6)} \\
 x - 6 + x + 6 &= 12 \\
 2x &= 12 & | : 2 \\
 x &= 6
 \end{aligned}$$

Die gefundene Lösung: $x = 6$ kann nicht in die Lösungsmenge eingesetzt werden, da sie in der Definitionsmenge ausgeschlossen wurde. Aus diesem Grunde bleibt die Lösungsmenge leer: $L = \{ \}$.

Lehrbeispiel 13

Subtrahieren Sie die Zahl 4 von der Summe aus dem Doppelten einer Zahl und der Hälfte der Zahl, so erhalten Sie die Hälfte der Zahl vermehrt um 2!

Lösung

Textgleichungen werden so gelöst, dass zusammenhängende Textpassagen in mathematische Terme umgeformt werden.

die Summe aus dem Doppelten einer Zahl und der Hälfte der Zahl	$2x + 1/2x$
Subtrahieren Sie die Zahl 4	$(2x + 1/2x) - 4$
so erhalten Sie	$(2x + 1/2x) - 4 =$
die Hälfte der Zahl	$(2x + 1/2x) - 4 = 1/2x$
vermehrt um 2	$(2x + 1/2x) - 4 = 1/2x + 2$

Gleichung:

$$\begin{aligned}
 (2x + 1/2x) - 4 &= 1/2x + 2 \\
 2 \cdot 1/2x - 4 &= 1/2x + 2 & | - 1/2x \\
 2x - 4 &= 2 & | + 4 \\
 2x &= 6 & | : 2 \\
 x &= 3 \\
 L &= \{3\}
 \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}
 (2 \cdot 3 + 1/2 \cdot 3) - 4 &= 1/2 \cdot 3 + 2 \\
 6 + 1,5 - 4 &= 1,5 + 2 \\
 3,5 &= 3,5 \quad (w)
 \end{aligned}$$

Antwort: Die gesuchte Zahl heißt drei.

Lehrbeispiel 14

Ein Apotheker stellt durch Mischung 70 %igen Alkohol her. Wie viel Liter 90 %igen Alkohol muss er zu 15 Litern 30 %igen Alkohol hinzufügen?

Lösung

		Volumen ges. in Liter	Volumen reiner Alkohol in Liter
Vor dem Mischen	90 %iger	x	$x \cdot 90/100$
	30 %iger	15	$15 \cdot 30/100$
nach dem Mischen	70 %iger	x + 15	$(x + 15) \cdot 70/100$

Aus dem Lösungsansatz: Vor dem Mischen - Nach dem Mischen lässt sich folgende Gleichung herleiten:

$$\begin{aligned}
 x \cdot 90/100 + 15 \cdot 30/100 &= (x + 15) \cdot 70/100 \\
 0,9x + 4,5 &= 0,7x + 10,5 && | - 0,7x \\
 0,2x + 4,5 &= 10,5 && | - 4,5 \\
 0,2x &= 6 && | : 0,2 \\
 x &= 30
 \end{aligned}$$

Antwort: Er muss 30 Liter 90 %igen Alkohol hinzufügen.

Lehrbeispiel 15

Ein LKW fährt mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h von Osnabrück nach Hamburg. Ein PKW fährt eine Stunde später in Osnabrück ab. Er hat eine Geschwindigkeit von 100 km/h.

Berechnen Sie die Zeit, bis der PKW den LKW überholt! Welche Strecke hat der LKW bis zum Treffpunkt zurückgelegt?

Lösung

	LKW	PKW
Zeit bis zum Treffen in h	x	x - 1
Geschwindigkeit in km/h	60	100
Strecke bis zum Treffpunkt	$60 \cdot x$	$100 (x - 1)$

Gleichung:

$$\begin{aligned}
 60x &= 100 (x - 1) \\
 60x &= 100x - 100 && | - 100x \\
 -40x &= -100 && | : (-40) \\
 x &= 2,5
 \end{aligned}$$

Antwort: Der LKW ist 2,5 Stunden unterwegs. Die gefahrene Strecke beträgt $2,5 \cdot 60 \text{ km/h} = 150 \text{ km}$.

Werden zwei Terme durch eines der Zeichen $<$; $>$; \leq ; \geq verbunden, so entsteht eine Ungleichung.

Lehrbeispiel 16

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichung!

$$x + 1 < -2$$

Lösung

Wenn keine bestimmte Grundmenge angegeben wird, ist \mathbb{R} die Grundmenge.

Beim Einsetzen für x ergibt sich z.B.:

$$\boxed{-4} + 1 < -2$$

$$\boxed{-5} + 1 < -2$$

$$\boxed{-6} + 1 < -2$$

Deutlich wird, dass nicht alle Elemente der Lösungsmenge aufgezählt werden können. Daher wählt man die **beschreibende Form**.

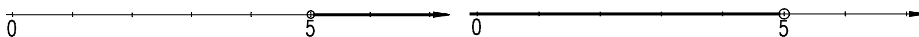
$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$$

Lies: L ist gleich der Menge aller x Elemente aus \mathbb{R} für die gilt: x kleiner -3 .

Die beiden Ungleichungen $x + 1 < -2$ und $x < -3$ haben dieselbe Lösungsmenge. Solche Lösungsmengen heißen äquivalent.

Die Lösungsmenge bleibt unverändert, wenn auf beiden Seiten der Ungleichung dieselbe Zahl subtrahiert bzw. addiert wird.

$x + 5 > 10 \quad -5$	$x - 3 < 2 \quad +3$
$x + 5 - 5 > 10 - 5$	$x - 3 + 3 < 2 + 3$
$x > 5$	$x < 5$
$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$	$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$



Lehrbeispiel 17

Zeigen Sie durch Einsetzen, dass die beiden Ungleichungen dieselbe Lösungsmenge haben!

$$5x < 15 \qquad x < 3$$

Lösung

$$\begin{array}{ll}
 5x < 15 & x < 3 \\
 5 \cdot \boxed{2} < 15 & \boxed{2} < 3 \\
 5 \cdot \boxed{1} < 15 & \boxed{1} < 3 \\
 5 \cdot \boxed{0} < 15 & \boxed{0} < 3 \\
 L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\} & L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}
 \end{array}$$

Die Lösungsmenge bleibt unverändert, wenn beide Seiten der Ungleichung mit derselben positiven Zahl multipliziert oder durch dieselbe positive Zahl dividiert werden.

Lehrbeispiel 18

Geben Sie für die beiden Ungleichungen die Lösungsmenge an!

$$-x < 5 \qquad x > -5$$

Lösung

$$\begin{array}{ll}
 -(-4) < 5 & -4 > -5 \\
 -(-3) < 5 & -3 > -5 \\
 -(-2) < 5 & -2 > -5 \\
 -(-1) < 5 & -1 > -5 \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot
 \end{array}$$

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\} \qquad L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$$

Da beide Lösungsmengen gleich sind, müssen die Ungleichungen $-x < 5$ und $x > -5$ äquivalent sein. Zu überlegen ist also, durch welche Äquivalenzumformung die Ungleichung $-x < 5$ in die Ungleichung $x > -5$ umgeformt werden kann.

$$\begin{array}{c}
 -x \boxed{<} 5 \\
 : (-1) \downarrow \qquad \qquad \downarrow : (-1) \\
 \downarrow \\
 \text{Austausch} \\
 x \boxed{>} -5 \\
 L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}
 \end{array}$$

Werden beide Seiten einer Ungleichung mit derselben negativen Zahl multipliziert oder durch dieselbe negative Zahl dividiert, muss das Ungleichheitszeichen umgedreht werden.

Lehrbeispiel 19*Geben Sie die Lösungsmenge an!*

$$2 [-2 -3 (x + 6)] \geq 2x + 4$$

Lösung

$$2 [-2 -3x -18] \geq 2x + 4$$

$$-4 -6x -36 \geq 2x + 4$$

$$-6x -40 \geq 2x + 4 \quad | -2x$$

$$-8x -40 \geq 4 \quad | +40$$

$$-8x \geq 44 \quad | :(-8)$$

$$x \leq -5,5$$

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5,5\}$$

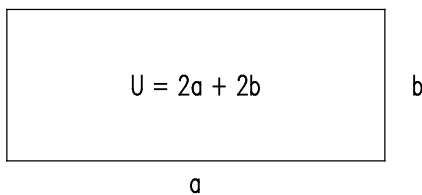
Lehrbeispiel 20

Der Umfang eines Rechtecks soll höchstens 40 cm betragen. Die eine Seite ist viermal so lang wie die andere.

*Wie lang dürfen die Rechteckseiten höchstens sein?***Lösung**

a ist viermal so lang wie b.

$$a = 4b$$



$$2a + 2b = U$$

$$2 \cdot 4b + 2b \leq U$$

$$10b \leq U$$

$$10b \leq 40 \quad | : 10$$

$$b \leq 4$$

$$a \leq 16$$

Antwort: Die Länge des Rechtecks darf höchstens 16 cm sein, die Breite höchstens 4 cm.

Aufgaben
Aufgabe 1

In einer Autofabrik wird eine Arbeitszeituntersuchung durchgeführt. Für die vollständige Montage eines Motors benötigt ein Arbeiter 120 Minuten, zwei Arbeiter benötigen jeweils 58 Minuten. Die weiteren Ergebnisse: 3 Arbeiter → jeweils 37 Minuten; 4 Arbeiter → jeweils 27 Minuten; 5 Arbeiter → jeweils 21 Minuten; 6 Arbeiter → jeweils 17 Minuten.

1.1 Berechnen Sie jeweils die Arbeitszeit, die insgesamt für die Montage eines Motors benötigt wird! Legen Sie eine Tabelle an für die Zuordnung Anzahl der Arbeiter → gesamte Arbeitszeit!

1.2 Zeichnen Sie den Grafen der Zuordnung!

Aufgabe 2

Ein Fahrzeug benötigt für eine Strecke von 240 km vier Stunden.

2.1 Berechnen Sie den Proportionalitätsfaktor k . Legen Sie eine Wertetabelle für die proportionale Zuordnung Zeit → Weg an. Geben Sie die Zuordnungsvorschrift an! Ergänzen Sie mithilfe von k zwei weitere Wertepaare für eine Fahrzeit von 6 Stunden und zwei Stunden!

2.2 Zeichnen Sie den Grafen der Zuordnung!

Aufgabe 3

Eine Zuckerfabrik verpackt den Zucker in Gewichtseinheiten zu je 3 kg. Dabei werden jeweils 1000 Packungen zusammengestellt.

3.1 Berechnen Sie die Proportionalitätskonstante c ! Legen Sie eine Wertetabelle mit zwei weiteren Wertepaaren (5 kg; 15 kg) für die antiproportionale Zuordnung Packungsgewicht → Anzahl der Packungen an! Geben Sie die Zuordnungsvorschrift an!

3.2 Zeichnen Sie den Grafen der Zuordnung!

Aufgabe 4

Ein Langstreckenläufer legt die Strecke von 10 km in 28,5 Minuten zurück.

4.1 Berechnen Sie mithilfe des Proportionalitätsfaktors k die Zeiten, die der Läufer durchschnittlich für eine Strecke von 100 m, 400 m, 1000 m, und 5000 m benötigt!

4.2 Zeichnen Sie den Grafen der Zuordnung!

Aufgabe 5

Die Kettenschaltung eines Sportrades hat einen Zahnkranz mit 6 Abstufungen: 13, 15, 17, 19, 21 und 24 Zähne. Bei dem Zahnkranz mit 21 Zähnen legt das Rad bei einer Pedaldrehung 4,80 m zurück.

5.1 Berechnen Sie mithilfe der Proportionalitätskonstanten c die zurückgelegten Strecken für die anderen Zahnräder!

5.2 Zeichnen Sie den Grafen der Zuordnung!

Aufgabe 6

Bei Erdarbeiten werden von einem 600 m^2 großen Grundstück 78 Tonnen Erde abgefahren. Das entspricht einer 10 cm dicken Schicht.

Wie viele Tonnen Erde müssen bei einem 800 m^2 großen Grundstück abgefahren werden, wenn der Boden 15 cm tief abgenommen wird?

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung!

7.1 $x + 6 = -11$

7.2 $3x = 54$

7.3 $-3x - 21 = -63$

7.4 $-[3(1 - x) - 5(6 - x)] = -3(9 - x) + 14$

7.5 $7x - [5(x - 7)^2 + 3(x - 1)^2] = 21 - 8x^2 - 20$

7.6 $\frac{7 - x}{2} + \frac{14x + 6}{3} = \frac{18(3 + x)}{9} + 4x - \frac{4}{9}$

7.7 $\frac{x}{b} - a = ax$

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die Lösungsmenge. Geben Sie zunächst die Definitionsmenge an!

8.1 $\frac{5 - 3x}{3x + 5} = \frac{12 - 5x}{5x + 1}$

8.2 $\frac{4x - 5}{3x + 3} - \frac{3x + 4}{5x - 5} = \frac{11x^2 - 69x + 58}{15x^2 - 15}$

Aufgabe 9

Aus 96 %igem Alkohol und 1/2 Liter 20 %igem Alkohol wird 32 %iger Alkohol hergestellt.

Wie viel cm^3 werden von dem 96 %igen Alkohol benötigt?

Aufgabe 10

Ein Verkehrsflugzeug fliegt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 550 km/h von Düsseldorf nach Rom. Ein Jumbo fliegt zwei Stunden später mit dem gleichen Ziel ab. Die Geschwindigkeit beträgt 950 km/h.

10.1 Nach welcher Flugzeit des Verkehrsflugzeuges hat der Jumbo dieses eingeholt?

10.2 Welche Strecke haben die Flugzeuge dann zurückgelegt?

Aufgabe 11

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung!

11.1 $3(7 - 2x) - 12 \geq 8 - 7x$

11.2 $2(x - 2)(x - 5) < 2x^2 - 4x - 10$

Aufgabe 12

Ein Handelsvertreter erhält von seinem Arbeitgeber folgendes Angebot:

- 1. Angebot: 1000 € Festgehalt und 6 % Provision vom Umsatz
- 2. Angebot: 1250 € Festgehalt und 4 % Provision vom Umsatz

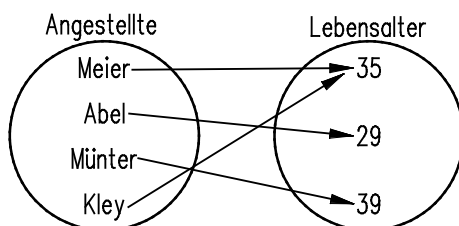
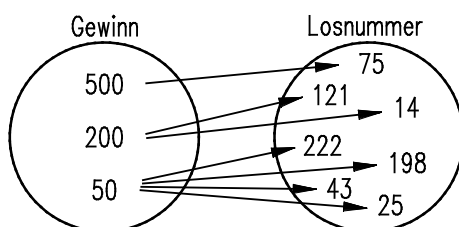
Von welchem monatlichen Umsatz an ist das 1. Angebot vorteilhafter für den Arbeitnehmer?

2 Funktionen als eindeutige Zuordnungen**Lernbereich****2.1 Definitionsmenge und Wertemenge**Lehrbeispiel 1

Fertigen Sie für die in den Tabellen dargestellten Zuordnungen jeweils das Pfeildia-
gramm an!

Gewinn	Losnummer
500	75
200	121; 14
50	222; 198
	43; 25

Angestellte	Lebensalter
Herr Meier	35
Frau Abel	29
Frau Münter	39
Herr Kley	35

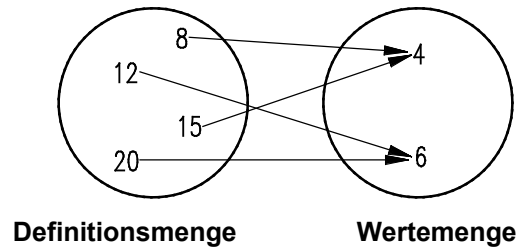
Lösung

Zahl → Anzahl der Teiler

Wertetabelle

Zahl	Anz. d. Teiler
8	4
12	6
15	4
20	6

Pfeildiagramm



Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung. Dafür muss gelten: Jedem Element der Definitionsmenge D wird genau ein Element der Wertemenge W zugeordnet. Im Pfeildiagramm wird dies dadurch deutlich, dass von jedem Element aus D genau ein Pfeil ausgeht und bei jedem Element der Wertemenge W mindestens ein Pfeil endet.

Lehrbeispiel 2

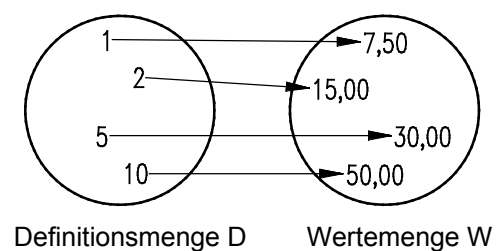
Ein Werbeplakat enthält folgende Information:

1 Stück kostet 7,50 €
 2 Stück kosten 15,00 €
 5 Stück kosten 30,00 €
 10 Stück kosten 50,00 €

Ordnen Sie in einer Wertetabelle! Zeichnen Sie das Pfeildiagramm und begründen Sie, warum es sich bei dieser Zuordnung um eine Funktion handelt! Bestimmen Sie Definitions- und Wertemenge!

Lösung

Stück	Preis in €
1	7,50
2	15,00
5	30,00
10	50,00



Es handelt sich bei dieser Zuordnung um eine Funktion, weil von jedem Element aus D ein Pfeil ausgeht und bei jedem Element aus W mindestens ein Pfeil endet.

2.2 Funktionen im Koordinatensystem

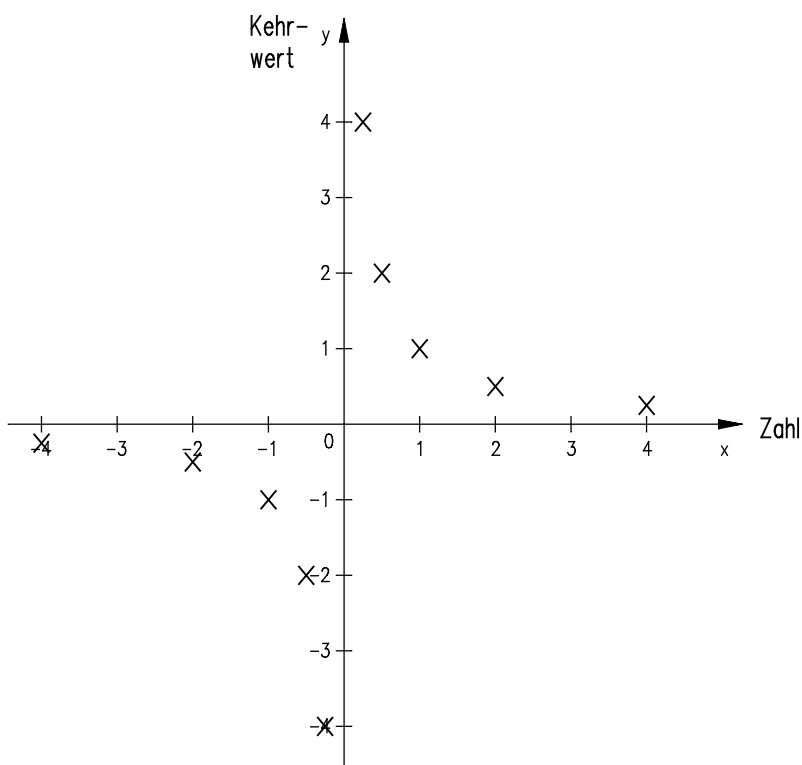
Bei der Darstellung von Funktionen im Koordinatensystem ist es üblich, die Elemente der Definitionsmenge ($x \in D$) auf der x-Achse und die Elemente der Wertemenge ($y \in W$) auf der y-Achse abzutragen.

Lehrbeispiel 1

Zeichnen Sie den Grafen der Funktion: Zahl \rightarrow Kehrwert der Zahl für folgende Zahlen: $-4; -2; -1; -0,5; -0,25; 0,25; 0,5; 1; 2; 4$!

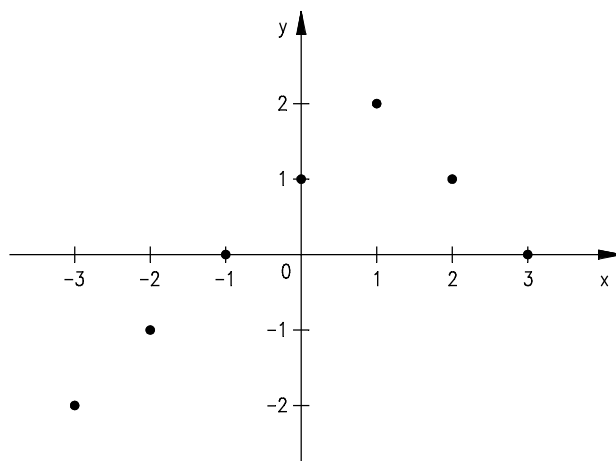
Lösung

Zahl \rightarrow	Kehrwert der Zahl
-4	-0,25
-2	-0,5
-1	-1
-0,5	-2
-0,25	-4
0,25	4
0,5	2
1	1
2	0,5
4	0,25

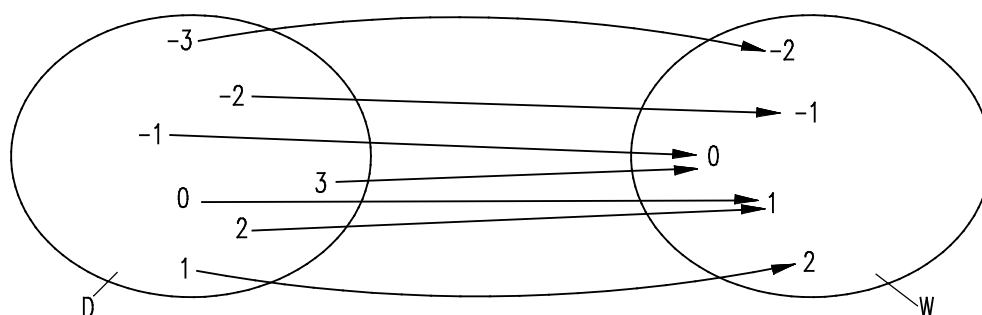


Lehrbeispiel 2

Bestimmen Sie anhand des Funktionsgraphen die Definitions- und Wertemenge!

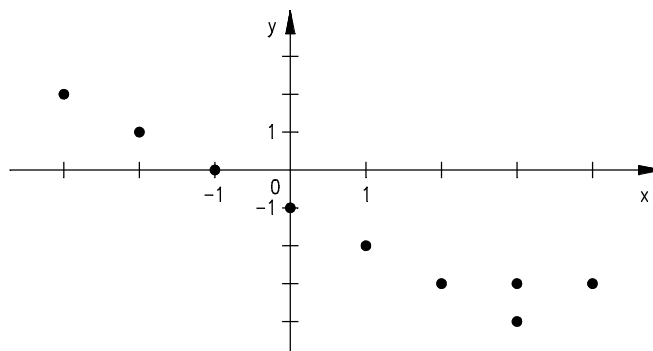


Lösung



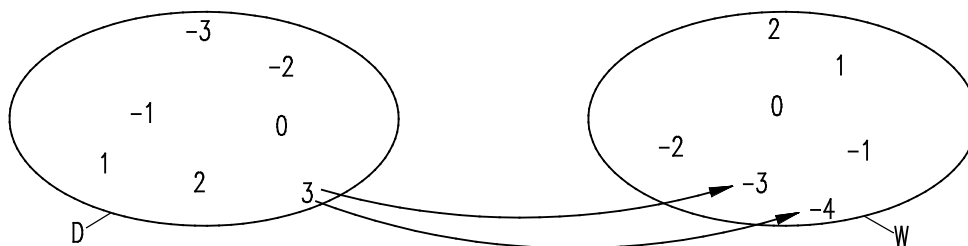
Lehrbeispiel 3

Legen Sie anhand des Grafen eine Wertetabelle an! Bestimmen Sie Definitions- und Wertemenge! Begründen Sie mithilfe des Pfeildiagramms, ob es sich um einen Funktionsgraphen handelt!



Lösung

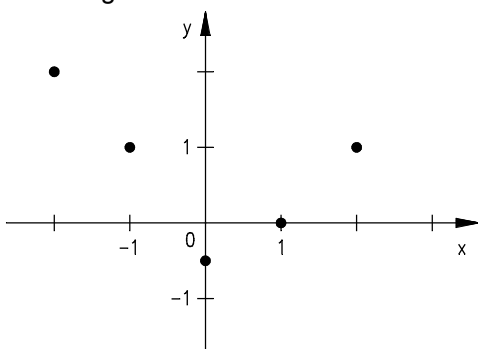
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	3	4
y	2	1	0	-1	-2	-3	-3	-4	-3



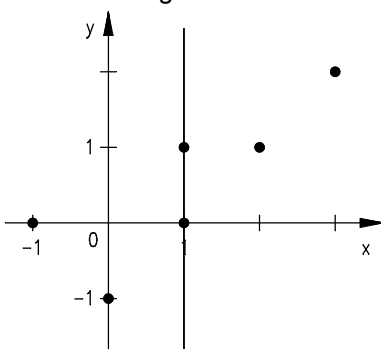
Antwort: Es handelt sich nicht um einen Funktionsgraphen, da von einem Element aus D ($x = 3$) zwei Pfeile ausgehen.

Für die Darstellung einer Funktion im Koordinatensystem gilt, dass auf jeder Parallelen zur y -Achse höchstens ein Punkt liegen darf.

Funktionsgraf



kein Funktionsgraf

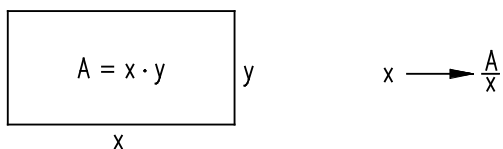


Lehrbeispiel 4

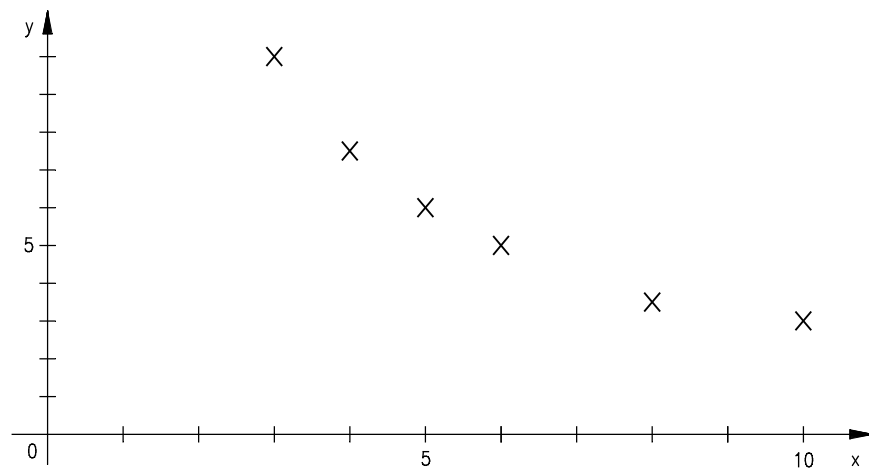
Der Flächeninhalt eines Rechtecks beträgt 30 cm^2 .

Zeichnen Sie den Grafen der Funktion, die jeder Länge die zugehörige Breite zuordnet. Als Definitionsmenge legen Sie $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 10\}$ zu Grunde!

Lösung



x	3	4	5	6	8	10
y	10	7,5	6	5	3,75	3



Aus der Formel für den Flächeninhalt eines Rechtecks $A = x \cdot y$ lässt sich die Variable y bestimmen:

$$A = x \cdot y \quad | : x$$

$$\frac{A}{x} = y$$

Im vorliegenden Beispiel wurde die Zuordnungsvorschrift mit $x \rightarrow A / x$ bestimmt. Es ist deutlich, dass beide Darstellungen dieselbe Funktion beschreiben.

Bezeichnungen für Funktionen

Zur Unterscheidung von Funktionen werden sie mit kleinen Buchstaben bezeichnet:

$$f: x \rightarrow 2x \quad g: x \rightarrow c / x \quad h: x \rightarrow 3x^2$$

Die Terme $2x$; c / x ; $3x^2$ werden dabei Funktionsterm genannt.

Funktionswert

Für eine Funktion f gilt: $f: 3 \rightarrow 6$

Dies bedeutet, dass die Funktion f der Zahl 3 die Zahl 6 zuordnet. Der Funktionswert von f an der Stelle 3 ist 6. ($f(3) = 6$)

Funktionsgleichung

Die Zuordnungsvorschrift $x \rightarrow 2x$ kann auch als Gleichung geschrieben werden:

$$f(x) = 2x \quad \text{oder} \quad y = 2x.$$

Im Koordinatensystem werden die Funktionswerte $f(x)$ auf der y -Achse abgetragen.

2.2.1 Funktion einer Geraden

Lehrbeispiel 1

Die proportionale Zuordnung Volumen \rightarrow Masse ist eine Funktion. Geben Sie für Messing (Dichte $\rho = 8,3 \text{ g/cm}^3$) die Funktionsgleichung an. Legen Sie eine Wertetabelle an. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 10\}$. Zeichnen Sie den Funktionsgraphen!

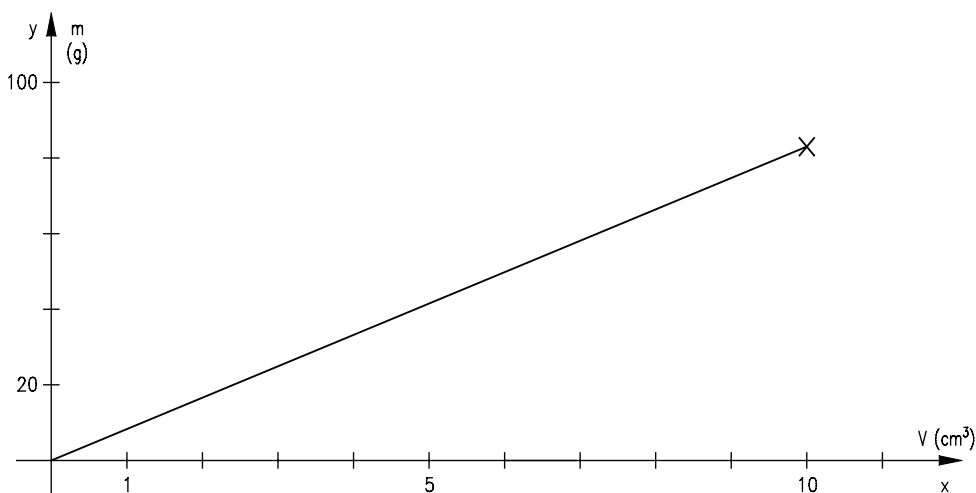
Lösung

$$\begin{array}{ccc} V (\text{cm}^3) & \rightarrow & m (\text{g}) \\ 1 & & 8,3 \end{array}$$

Proportionalitätsfaktor: $k = 8,3$

Funktionsgleichung: $f: x \rightarrow 8,3x$ oder $y = 8,3x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	8,3	16,6	24,9	33,2	41,5	49,8	58,1	66,4	74,7	83,0



Lehrbeispiel 2

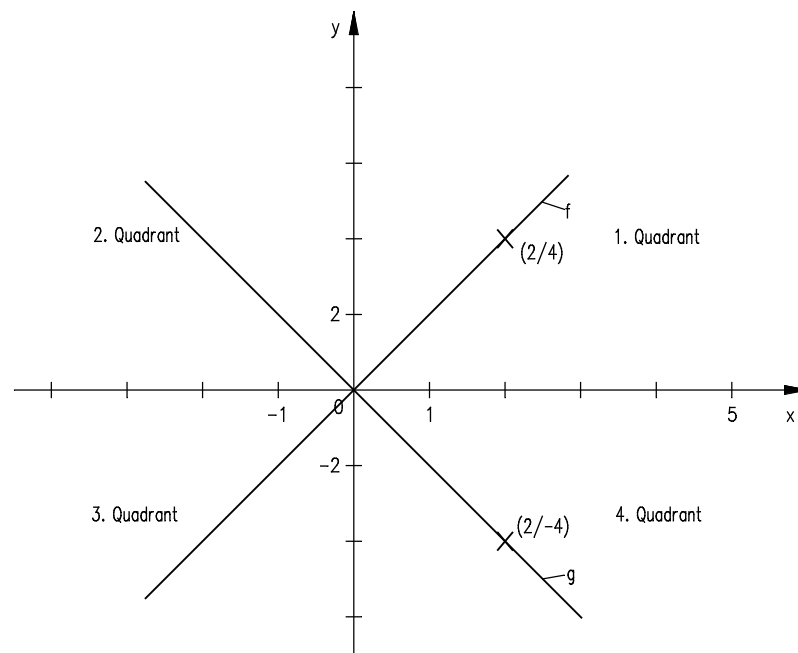
Zeichnen Sie jeweils den Graphen der Funktion mit dem Funktionsterm mx in ein Koordinatensystem! $f: x \rightarrow 2x$ $g: x \rightarrow -2x$

Lösung

Ausgangspunkt der Lösung ist die Überlegung, dass eine Gerade durch zwei Punkte eindeutig festgelegt ist. Daher ist es ausreichend, in die Wertetabelle nur zwei Koordinaten einzutragen.

$$\begin{array}{ll} f: & x \rightarrow 2x; m = 2 \\ g: & x \rightarrow -2x; m = -2 \end{array}$$

x	0	2
f(x)	0	4
g(x)	0	-4



Aus den beiden Funktionsgraphen lassen sich folgende Erkenntnisse gewinnen:

Die Funktionsgraphen sind Geraden durch den Ursprung (0;0). Für $m > 0$ (hier: $m = 2$) verläuft die **Ursprungsgerade** durch den I. und III. **Quadranten**, für $m < 0$ (hier: $m = -2$) durch den II. und IV. Quadranten.

Lehrbeispiel 3

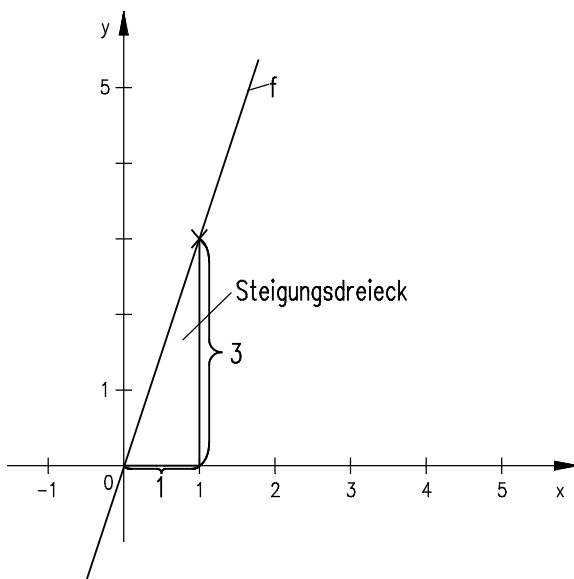
Zeichnen Sie den Grafen der Funktion $f(x) = 3x!$ Nutzen Sie dabei den Faktor $m!$

Lösung

Bei dem Grafen handelt es sich um eine Ursprungsgerade, bei der ein Punkt bereits festliegt: (0;0).

Wenn man nun **vom Ursprung aus eine Einheit in die positive x-Richtung** geht, muss der **zugehörige Wert $f(x)$ um m Einheiten (hier: 3) nach oben** gehen.

$$f(1) = 3 \cdot \boxed{1} = 3$$



Somit sind zwei Punkte - und damit die Gerade - fest gelegt. Da der Faktor m die Steigung der Geraden angibt, heißt er **Steigungsfaktor**.

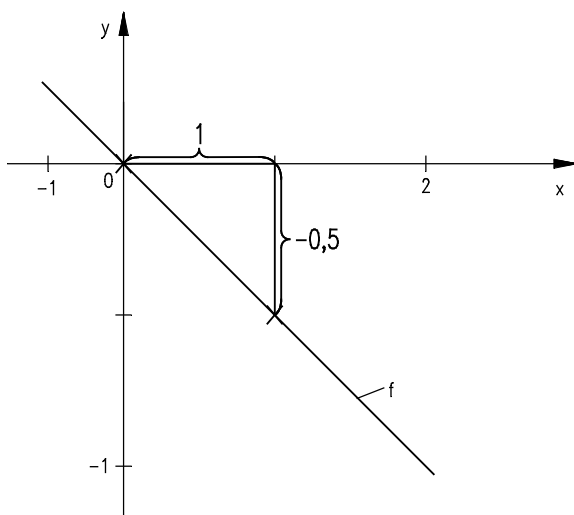
Das Dreieck, das zum Festlegen des zweiten Punktes gezeichnet wird, heißt **Steigungsdreieck**.

Lehrbeispiel 4

Zeichnen Sie mithilfe des Steigungsdreiecks den Graf der Funktion $f(x) = -0,5x$!

Lösung

Festlegen der zwei Punkte: (1) Ursprungspunkt $(0;0)$
 (2) $f(1) = -0,5 \cdot 1 = -0,5$ $(1;-0,5)$



Bei einem **negativen Steigungsfaktor** m (hier: $m = -0,5$) geht man vom Ursprung eine Einheit nach rechts und m Einheiten nach unten.

Lehrbeispiel 5

Überprüfen Sie, ob die Punkte P und Q auf dem Grafen der Funktion $f(x)$ mit $f(x) = (-2/3) \cdot x$ liegen! $P(-6;4)$ $Q(-2,4;-1,6)$

Lösung

$$\begin{aligned} f(x) &= (-2/3) \cdot x \quad \text{für } P: f(-6) = -2/3 \cdot (-6) \\ &= 4 \\ 4 &= 4 \text{ (w)} \end{aligned}$$

Antwort: Der Punkt P liegt auf dem Grafen.

$$\begin{aligned} \text{für } Q: f(-2,4) &= -2/3 \cdot (-2,4) \\ &= 1,6 \\ -1,6 &= 1,6 \text{ (f)} \end{aligned}$$

Antwort: Der Punkt Q liegt nicht auf dem Grafen.

Lehrbeispiel 6

Berechnen Sie die Steigung der Ursprungsgeraden durch den Punkt P und geben Sie die Funktionsgleichung an! $P(-14;-8)$

Lösung

Der Punkt P liegt auf einer Ursprungsgeraden; d.h. die Koordinaten des Punktes P müssen die Funktionsgleichung $f(x) = mx$ erfüllen.

$$\begin{aligned} P(-14;-8) \quad & f(-14) = -8 \\ & f(-14) = m \cdot (-14) \\ & -8 = m \cdot (-14) \quad | :(-14) \\ & m = 4/7 \end{aligned}$$

$$\text{Funktionsgleichung: } f(x) = (4/7) \cdot x$$

Eine **allgemeine Lösung** ergibt dann:

$$\begin{aligned} P(x;y) \quad & f(x) = y \\ & f(x) = m \cdot x \\ & m \cdot x = y \quad | :x \\ & m = y / x \end{aligned}$$

Die Steigung einer Ursprungsgeraden durch den Punkt P erhält man, indem man die y-Koordinate durch die x-Koordinate ($x \neq 0$) dividiert: $m = y/x$.

Lehrbeispiel 7

Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von $g(x) = 3x + 4$ mithilfe des Steigungsdreiecks!

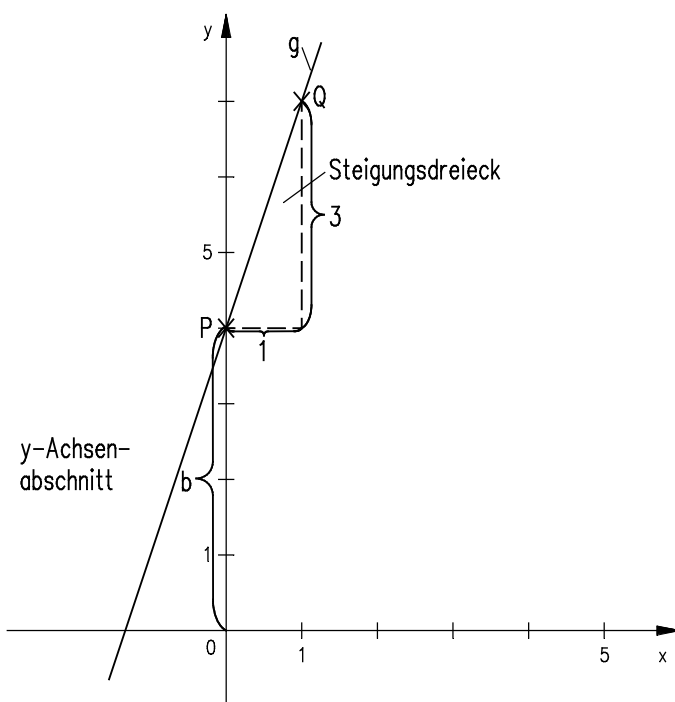
Lösung

Bei dem Grafen dieser Funktion kann es sich nicht um eine Ursprungsgerade handeln, da der Term außer mx noch einen zweiten Summanden $(+4)$ enthält. Da es sich aber um eine Gerade handeln muss, lässt sich der Graf mit zwei Punkten festlegen.

$$g(x) = 3x + 4$$

$$g(0) = 3 \cdot \boxed{0} + 4 = 4 \quad P(0;4)$$

$$g(1) = 3 \cdot \boxed{1} + 4 = 7 \quad Q(1;7)$$



Es ist deutlich, dass der Graf der Funktion g eine nach oben verschobene Ursprungsgerade ist mit dem Steigungsfaktor $m = 3$.

Der Schnittpunkt des Grafen mit der y -Achse ergibt sich durch Berechnen des Funktionswertes an der Stelle $x = 0$.

$$x = 0 \quad g(x) = 3x + \boxed{4}$$

$$g(0) = 3 \cdot 0 + 4 = 0 + 4 = \boxed{4} \quad P(0;4)$$

Dieser Punkt kann also auch **ohne Berechnung abgelesen werden**.

Funktionen mit dem Funktionsterm $mx + b$ heißen lineare Funktionen. Die zugehörigen Grafen sind Geraden.

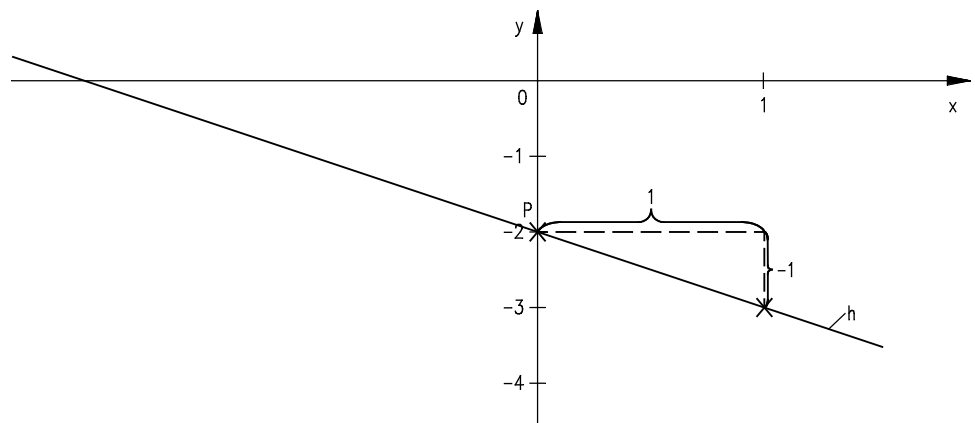
Dabei gibt m die Steigung der Geraden und b den y -Achsenabschnitt (Schnittpunkt mit der y -Achse) an. ($m, b \in \mathbb{R}$)

Lehrbeispiel 8

Zeichnen Sie den Grafen der Funktion $h(x) = -x - 2$!

Lösung

1. Lösungsschritt: Festlegen des Steigungsfaktors m und des y-Achsenabschnitts b
 $m = -1$ $b = -2$
2. Lösungsschritt: Eintragen des Punktes $P(0; -2)$
3. Lösungsschritt: Zeichnen des Steigungsdreiecks: **eine Einheit nach rechts, eine Einheit nach unten**



Lehrbeispiel 9

Überprüfen Sie, ob die Punkte P und Q auf dem Funktionsgrafen von f liegen!
 $P(-4; -1)$ $Q(12; 35)$ $f(x) = 4,5x - 19$

Lösung

$$f(x) = 4,5x - 19$$

$$P(-4; -1)$$

$$f(-4) = 4,5 \cdot (-4) - 19$$

$$f(-4) = -37$$

$$-1 \neq -37 \text{ (f)}$$

$$Q(12; 35)$$

$$f(12) = 4,5 \cdot 12 - 19$$

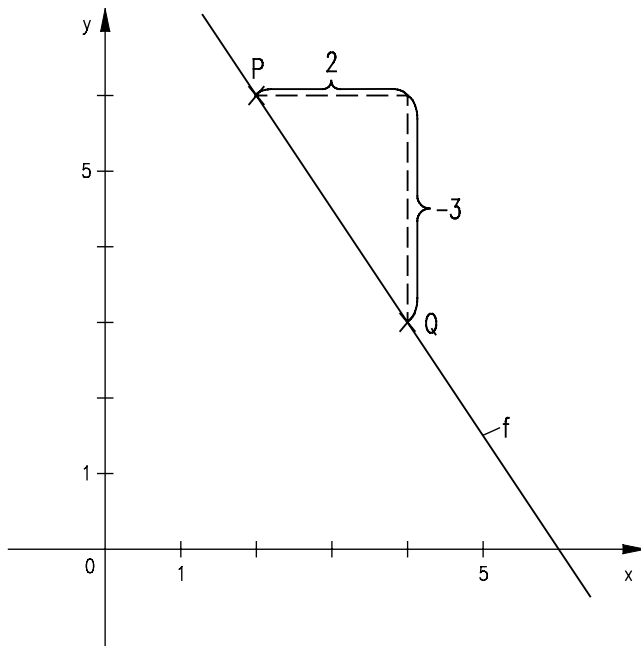
$$f(12) = 35$$

$$35 = 35 \text{ (w)}$$

Antwort: Der Punkt P liegt nicht auf dem Grafen, der Punkt Q liegt auf dem Grafen.

Lehrbeispiel 10

Der Graf einer linearen Funktion $f(x)$ verläuft durch die Punkte P und Q. Zeichnen Sie die Gerade. Berechnen Sie mithilfe der Punkt-Koordinaten die Steigung m . Geben Sie anschließend die Funktionsgleichung an! $P(2;6)$; $Q(4;3)$

Lösung

Aus dem Steigungsdreieck lässt sich folgendes entnehmen: **zwei Längeneinheiten nach rechts, drei Längeneinheiten nach unten.**

Würde man nur eine Längeneinheit nach rechts gehen, müsste man auch nur 1,5 Einheiten nach unten gehen.

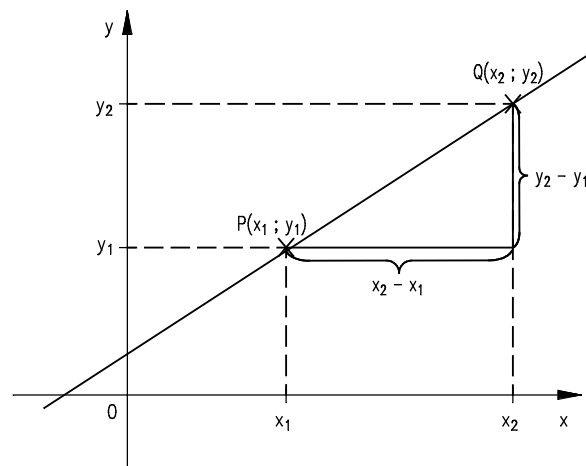
Daraus lässt sich der Steigungsfaktor m bestimmen: $(-3) : 2 = (-1,5) : 1 = -1,5$
 $m = -1,5$

Mithilfe der Koordinaten lässt sich folgende Rechnung aufstellen:

$$P(2;6) \quad Q(4;3) \quad m = \frac{3-6}{4-2} = \frac{-3}{2} = -1,5$$

Allgemein gilt für $P(x_1; y_1)$ und $Q(x_2; y_2)$ mit $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$; $x_1 \neq x_2$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Damit lässt sich an dieser Stelle bereits teilweise die Funktionsgleichung angeben:

$$f(x) = -1,5x + b$$

Zur Berechnung von b werden die Koordinaten von P oder Q in die Funktionsgleichung $f(x) = -1,5x + b$ eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & -1,5x + b \quad P(2;6) \\ f(2) & = & -1,5 \cdot \boxed{2} + b \\ 6 & = & -3 + b \quad | +3 \\ 9 & = & b \end{array}$$

Funktionsgleichung: $f(x) = -1,5x + 9$

Lehrbeispiel 11

Berechnen Sie die Funktionsgleichung der linearen Funktion $g(x)$, deren Graf durch die Punkte P und Q geht! $P(-1;6)$; $Q(1;2)$

Lösung

1. Lösungsschritt: Berechnen der Steigung

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 6}{1 - (-1)} \\ &= \frac{-4}{2} = -2 \end{aligned}$$

2. Lösungsschritt: Berechnen des y-Achsenabschnitts b durch Einsetzen von Q

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & -2x + b \quad Q(1;2) \\ g(1) & = & -2 \cdot \boxed{1} + b \\ 2 & = & -2 + b \quad | +2 \\ 4 & = & b \end{array}$$

Funktionsgleichung: $g(x) = -2x + 4$

Lehrbeispiel 12

Überprüfen Sie, ob die Punkte P, Q und R auf einer Geraden liegen!
 P(2;2); Q(5;11); R(-1;-7)

Lösung

Da zwei Punkte immer auf einer Geraden liegen müssen, berechnet man zunächst die Funktionsgleichung der Geraden durch zwei beliebige Punkte. (z.B. Q und R)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7 - 11}{-1 - 5} = \frac{-18}{-6} = 3$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x + b \quad \text{für Q gilt: } f(5) = 3 \cdot 5 + b \\ 11 &= 15 + b \quad | -15 \\ -4 &= b \end{aligned}$$

Funktionsgleichung: $f(x) = 3x - 4$

$$\begin{aligned} \text{Überprüfen von P: } f(2) &= 3 \cdot 2 - 4 \\ 2 &= 6 - 4 \\ 2 &= 2 \quad (\text{w}) \end{aligned}$$

Antwort: Alle drei Punkte liegen auf einer Geraden.

2.2.2 Nullstellen einer Geraden und Schnittpunkt zweier GeradenLehrbeispiel 1

Lösen Sie die lineare Gleichung $4x - 12 = x - 10$ grafisch!

Lösung

Die grafische Lösung einer linearen Gleichung setzt voraus, dass eine Funktionsgleichung vorliegt; erst diese kann grafisch dargestellt werden.

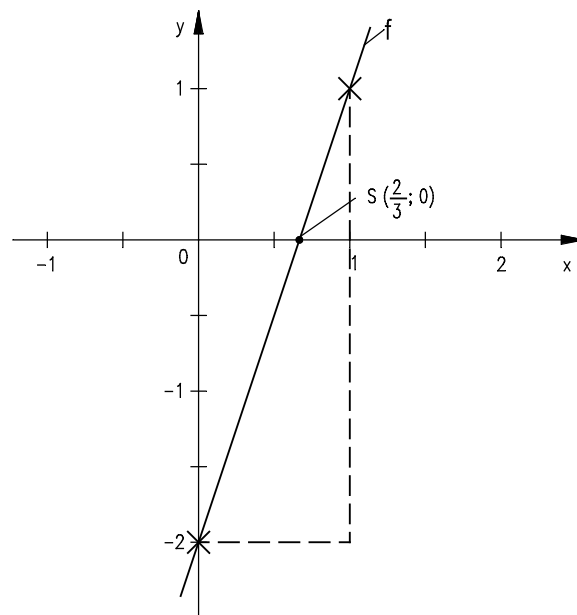
Zunächst muss also die Gleichung so umgeformt werden, dass alle Glieder auf eine Seite gebracht werden.

$$\begin{array}{rcl} 4x - 12 = x - 10 & | & -x \\ 3x - 12 = -10 & | & +10 \\ 3x - 2 = & & 0 \end{array}$$

Nun wird an die Stelle der Null die Variable y gesetzt; man erhält die Funktionsgleichung

$$y = 3x - 2 \quad \text{oder} \quad f(x) = 3x - 2.$$

Mithilfe des Steigungsfaktors und des y-Achsenabschnitts wird der Graf gezeichnet.



Da die Variable y an die Stelle der Null gesetzt wurde, ist die Lösung für x der Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der x -Achse: $S(x;0)$.

Dieser Schnittpunkt S des Funktionsgraphen von f mit der x -Achse hat die y -Koordinate 0. **Die x -Koordinate von S wird Nullstelle der Funktion f genannt.**

Lehrbeispiel 2

Der Punkt P liegt auf dem Funktionsgraphen von f .

Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion!

$$P(x;0) ; f(x) = -\frac{2}{3}x - 8$$

Lösung

$$\begin{array}{lcl} f(x) = -\frac{2}{3}x - 8 & \text{Nullstelle:} & f(x) = 0 \\ & & 0 = -\frac{2}{3}x - 8 \quad \left| + \frac{2}{3}x \right. \\ & & \frac{2}{3}x = -8 \quad \left| : \frac{2}{3} \right. \\ & & x = -12 \end{array}$$

Antwort: Der Punkt P hat die Koordinaten $(-12;0)$; die Nullstelle liegt bei $x = -12$.

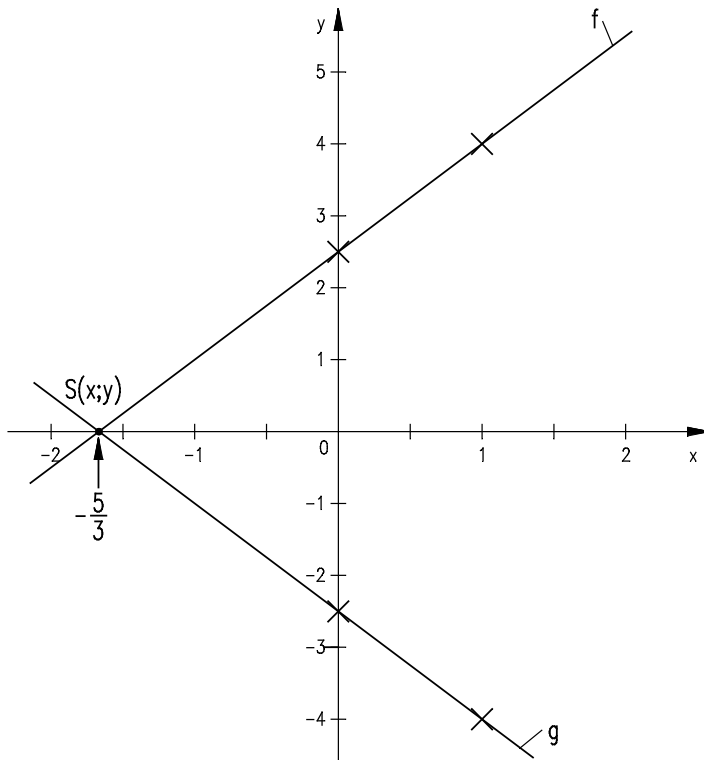
Lehrbeispiel 3

Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Funktionsgraphen von f und g !

$$f(x) = 1,5x + 2,5 ; \quad g(x) = -\frac{3}{2}x - 2,5$$

Lösung

Damit die anschließenden Überlegungen deutlich werden, sollen zunächst beide Funktionsgraphen in ein Koordinatensystem gezeichnet werden.



Der Schnittpunkt $S(x;y)$ hat die Eigenschaft, dass er als einziger Punkt sowohl auf dem Graphen von f als auch auf dem Graphen von g liegt. D.h. er muss beide Funktionsgleichungen erfüllen.

Dieses bedeutet für die rechnerische Lösung, dass beide Funktionsterme in diesem Punkt gleich sein müssen.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 1,5x + 2,5 &= -3/2 x - 2,5 \end{aligned}$$

Mithilfe dieser Gleichung lässt sich die x-Koordinate des Schnittpunktes bestimmen.

$$\begin{array}{rcl|l} 1,5x + 2,5 & = & -3/2 x - 2,5 & + 3/2 x \\ 3x + 2,5 & = & -2,5 & -2,5 \\ 3x & = & -5 & : 3 \\ x & = & -5/3 & \end{array}$$

Dieser errechnete x-Wert muss nun in eine der beiden Funktionsgleichungen eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} f(x) = 1,5x + 2,5 \quad \text{für } x = -5/3 \text{ gilt: } f(-5/3) &= 1,5 \cdot (-5/3) + 2,5 \\ &= -2,5 + 2,5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Antwort: Der Schnittpunkt S hat die Koordinaten $(-5/3; 0)$.

Lehrbeispiel 4

Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden mit $f(x) = -1/3 x + 1/2$ und $g(x) = 1/2 x + 3$!

Lösung

Für den Schnittpunkt S gilt:

$$\begin{array}{rcl}
 f(x) & = & g(x) \\
 -1/3 x + 1/2 & = & 1/2 x + 3 \quad | -1/2 x \\
 -2/6x - 3/6x + 1/2 & = & 3 \quad | -1/2 \\
 -5/6 x & = & 2 \frac{1}{2} \quad | : (-5/6) \\
 x & = & -3
 \end{array}$$

Die x-Koordinate in g(x) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
 g(x) &= 1/2 x + 3 \\
 g(-3) &= 1/2 (-3) + 3 \\
 &= 1,5
 \end{aligned}$$

Antwort: Der Schnittpunkt S hat die Koordinaten $(-3; 1,5)$.

2.2.3 Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

Lehrbeispiel 1

Geben Sie den Umfang eines Rechtecks mithilfe eines Variablenbegriffs an! Der Umfang U beträgt 30 cm! Geben Sie drei verschiedene Lösungen an!

Lösung

$$U = 2a + 2b$$

$$30 = 2a + 2b$$

Länge a (cm)	5	8	12
Breite b (cm)	10	7	3

Antwort: Drei mögliche Lösungspaare (a;b) sind: (5;10); (8;7); (12;3).

Deutlich wird bei der Lösung, dass die angegebenen Lösungspaare nur eine Teilmenge aller möglichen Lösungen darstellen.

Für lineare Gleichungen mit zwei Variablen der Form $2x + 2y = 30$ gilt:

Jede der Variablen kann durch eine reelle Zahl ersetzt werden. Die Lösungen der Gleichung sind Zahlenpaare. Die Lösungsmenge L besteht aus unendlich vielen Zahlenpaaren. $L = \{(5;10); (8;7); (12;3); \dots\}$

Um die lineare Gleichung mit zwei Variablen $2x + 2y = 30$ grafisch darstellen zu können, muss aus der Gleichung die Normalform einer linearen Gleichung mit zwei Variablen durch Äquivalenzumformungen erzeugt werden.

$$\begin{array}{rcl}
 2x + 2y & = & 30 \quad | -2x \\
 2y & = & -2x + 30 \quad | : 2 \\
 y & = & -x + 15
 \end{array}$$

Lösungen der Normalform $y = mx + b$ sind auch Lösungen der Ausgangsgleichung.

Diese Gleichung in Normalform $y = -x + 15$ kann als Funktionsgleichung einer linearen Funktion begriffen werden, die nun grafisch dargestellt werden kann.

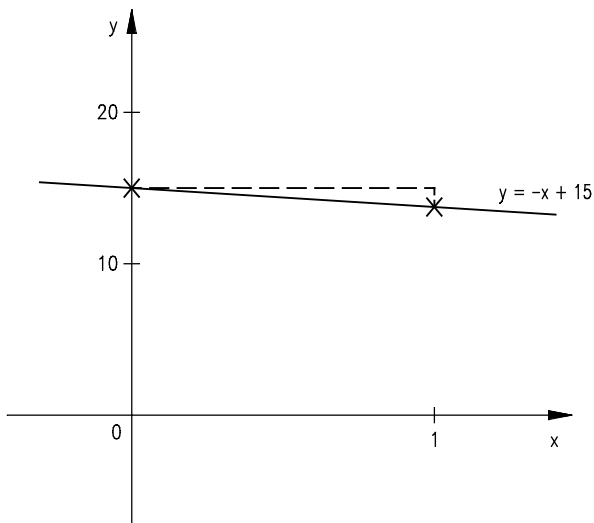


Abbildung 3 Graf einer Gleichung mit 2 Variablen

Nun lassen sich für den Funktionsgraphen folgende Aussagen machen:

- Die Koordinaten eines Punktes, der auf der Geraden liegt, sind eine Lösung der Gleichung.
- Jedes Zahlenpaar, das die Gleichung erfüllt, liegt als Punkt auf der Geraden.
- Da die Gerade weder Anfang noch Ende hat, gibt es unendlich viele Lösungen der Gleichung.

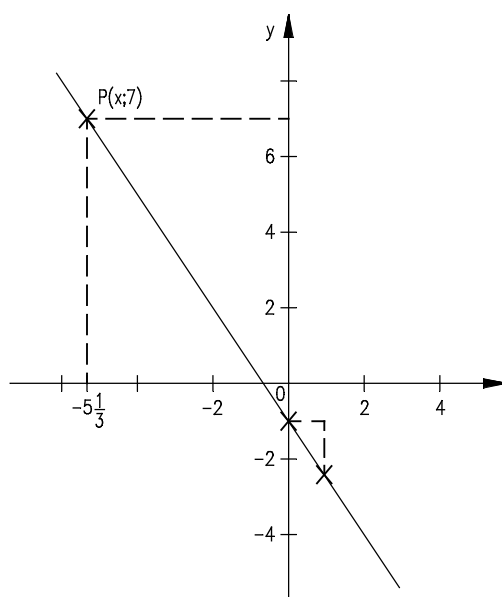
Lehrbeispiel 2

Lösen Sie die Gleichung nach y auf und zeichnen Sie den zugehörigen Grafen! Bestimmen Sie die fehlende Koordinate des Punktes P auf dem Grafen und zeigen Sie, dass die Koordinaten von P Lösung der Ausgangsgleichung sind!

$$3x + 2y = -2 \quad P(x;7)$$

Lösung

$$\begin{array}{rcl|l} 3x + 2y & = & -2 & \\ 2y & = & -3x - 2 & : 2 \\ y & = & -3/2 x - 1 & \end{array}$$



$$\begin{array}{rcl}
 y & = & -3/2x - 1 \\
 7 & = & -3/2x - 1 \quad | +1 \\
 8 & = & -3/2x \quad | : (-3/2) \\
 x & = & -5 \frac{1}{3}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 P(x; 7) \\
 +1 \\
 : (-3/2)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 P(-51/3; 7) \text{ eingesetzt} & y = & -3/2x - 1 \\
 & 7 = & (-3/2) \cdot (-51/3) - 1 \\
 & 7 = & 8 - 1 \\
 & 7 = & 7 \text{ (w)}
 \end{array}$$

Lehrbeispiel 3

Ein Rechteck mit den Seitenlängen x und y hat einen Umfang von 20 cm. Die Länge x ist um 4 cm größer als die Breite y .

Bestimmen Sie die Seitenlängen x und y !

Lösung

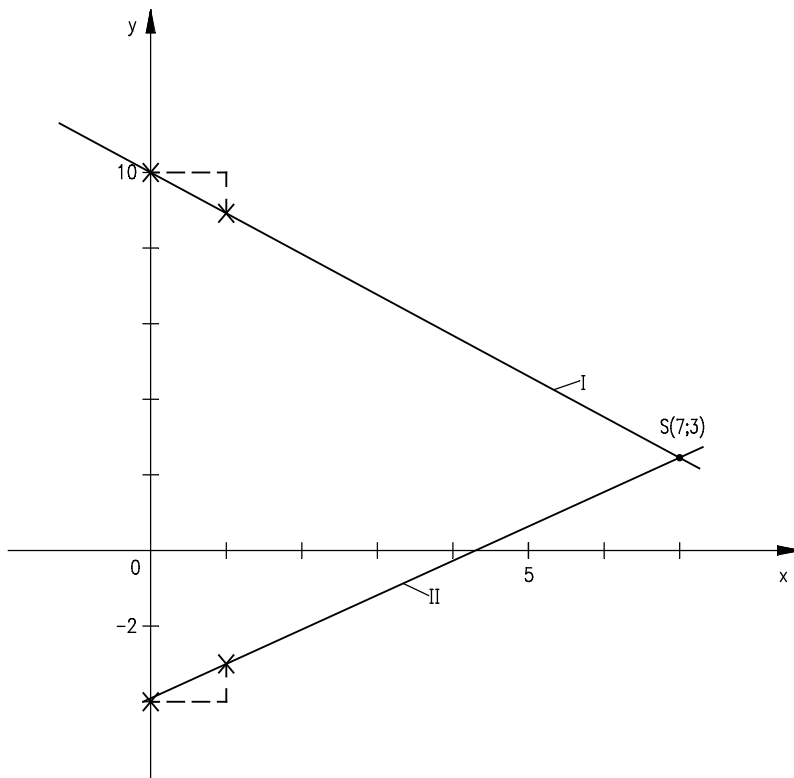
Aus den gegebenen Informationen lassen sich folgende Gleichungen formulieren:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(I)} & 2x + 2y = 20 \\
 \text{(II)} & x = y + 4
 \end{array}$$

Diese beiden linearen Gleichungen mit zwei Variablen bilden ein **lineares Gleichungssystem**.

Eine Lösungsmöglichkeit besteht darin, beide Gleichungen in ein Koordinatensystem zu zeichnen.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{(I)} & 2x + 2y = 20 & | -2x \\
 & 2y = -2x + 20 & | :2 \\
 & y = -x + 10 & \\
 \text{(II)} & x = y + 4 & \\
 & y = x - 4 &
 \end{array}$$



Der Schnittpunkt $S(x;y)$ erfüllt beide Funktionsgleichungen; seine Koordinaten sind also Lösung des Gleichungssystems. Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $S(7;3)$.

Zur Kontrolle werden die Koordinaten von S in beide Gleichungen eingesetzt.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(I)} & 2x + 2y = 20 \\
 & 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3 = 20 \\
 & 14 + 6 = 20 \\
 & 20 = 20 \\
 \text{(II)} & x = y + 4 \\
 & 7 = 3 + 4 \\
 & 7 = 7 \text{ (w)} \\
 & \text{(w)} \\
 & L = \{(7;3)\}
 \end{array}$$

Lehrbeispiel 4

Bestimmen Sie grafisch die Lösung des Gleichungssystems. Machen Sie die Probe!

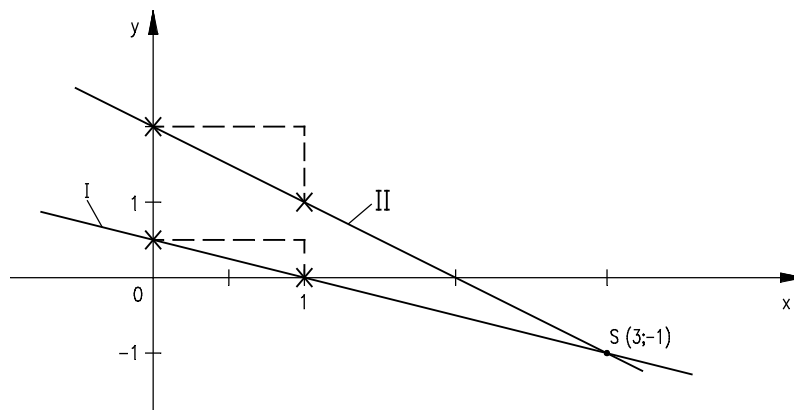
$$\begin{array}{ll}
 \text{(I)} & 2y + x = 1 \\
 \text{(II)} & y + x = 2
 \end{array}$$

Lösung

1. Lösungsschritt: Umformen beider Gleichungen in die Normalform

$$\begin{array}{ll}
 \text{(I)} & 2y + x = 1 \quad \left| \begin{array}{l} -x \\ : 2 \end{array} \right. \\
 & 2y = -x + 1 \\
 & y = -1/2 x + 1/2 \\
 \text{(II)} & y + x = 2 \quad \left| \begin{array}{l} -x \end{array} \right. \\
 & y = -x + 2
 \end{array}$$

2. Lösungsschritt: Zeichnen der Grafen



Probe:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(I)} & 2y + x = 1 \\
 & 2 \cdot (-1) + 3 = 1 \\
 & -2 + 3 = 1 \\
 & 1 = 1 \quad \text{(w)} \\
 \text{(II)} & y + x = 2 \\
 & (-1) + 3 = 2 \\
 & 2 = 2 \quad \text{(w)} \\
 & L = \{(3; -1)\}
 \end{array}$$

Lehrbeispiel 5

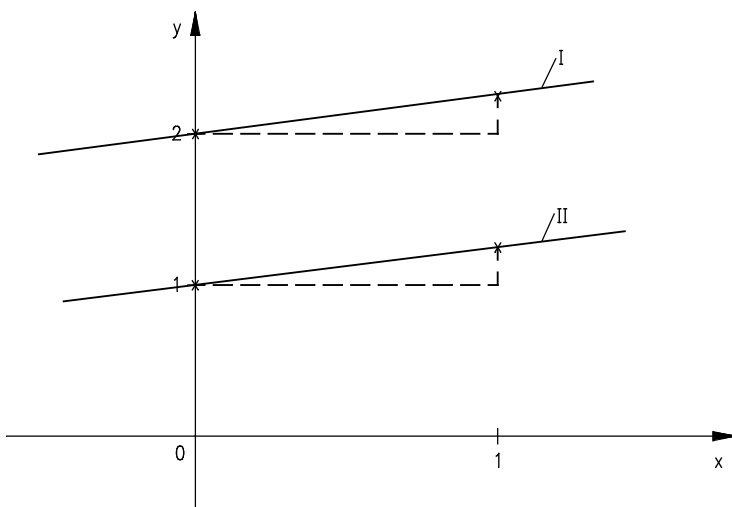
Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge des Gleichungssystems!

$$\begin{array}{ll}
 \text{Beispiel 1: (I)} & 2y - 0,5x = 4 \\
 \text{Beispiel 2: (I)} & 3y - 1,5x = 3 \\
 \text{Beispiel 3: (I)} & y - 1/8 x = 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 \text{(II)} & y = 0,25x + 1 \\
 \text{(II)} & y + 0,5x = 5 \\
 \text{(II)} & 2y = 1/4 x + 4
 \end{array}$$

Lösung

Beispiel 1:

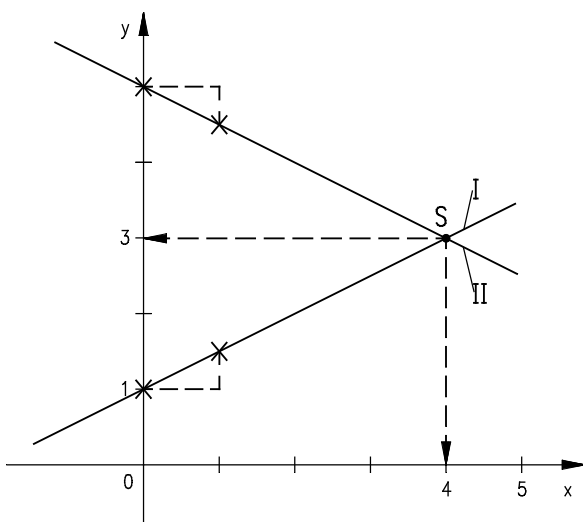
$$\begin{array}{ll}
 \text{(I)} & 2y - 0,5x = 4 \\
 & 2y = 0,5x + 4 \\
 & y = 0,25x + 2 \\
 \text{(II)} & y = 0,25x + 1
 \end{array}$$



Beide Grafen verlaufen parallel zueinander, da der Steigungsfaktor m in beiden Gleichungen gleich ist: $m = 0,25$. Da sich die Geraden nicht schneiden, existiert keine Lösung: $L = \{ \}$.

Beispiel 2:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 3y - 1,5x = 3 \\ & 3y = 1,5x + 3 \\ & y = 0,5x + 1 \\ \text{(II)} & y + 0,5x = 5 \\ & y = -0,5x + 5 \end{array}$$

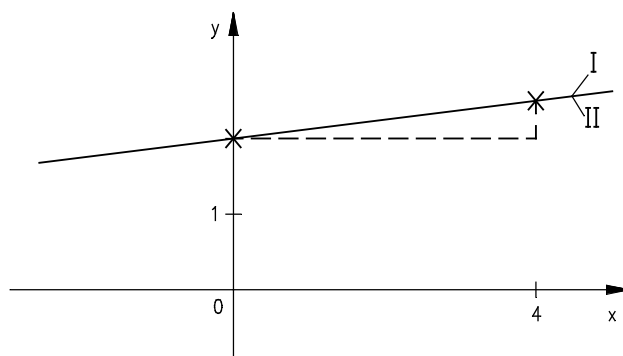


In diesem Fall existiert genau eine Lösung: $L = \{(4;3)\}$

Beispiel 3:

$$(I) \quad \begin{aligned} y - 1/8x &= 2 \\ y &= 1/8x + 2 \end{aligned}$$

$$(II) \quad \begin{aligned} 2y &= 1/4x + 4 \\ y &= 1/8x + 2 \end{aligned}$$



Jeder Punkt mit seinen Koordinaten (x;y) ist Lösung des Gleichungssystems. Es gibt also unendlich viele Lösungen.

Im unten abgebildeten Koordinatensystem sind die Grafen des linearen Gleichungssystems

$$(I) \quad y = -0,5x + 2,5$$

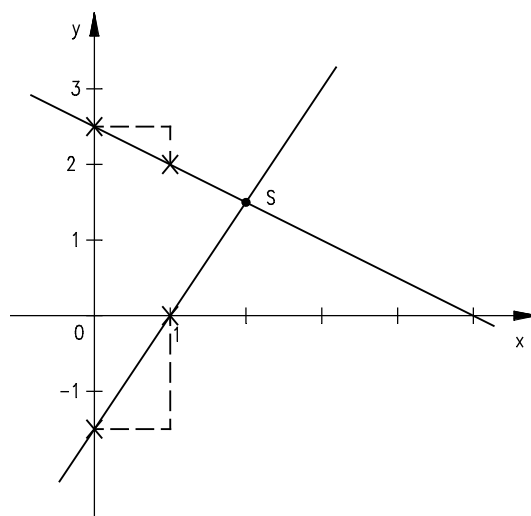
$$(II) \quad y = 1,5x - 1,5$$

dargestellt. Der Schnittpunkt S(x;y) hat die Koordinaten (2;1,5).

Zur Probe werden die Koordinaten eingesetzt:

$$(I) \quad 1,5 = -0,5 \cdot 2 + 2,5 \quad (w)$$

$$(II) \quad 1,5 = 1,5 \cdot 2 - 1,5 \quad (w)$$



Wenn bei beiden Gleichungen die linken Seiten gleich sind, muss dies auch für die rechten Seiten gelten. Also ist:

$$\begin{aligned} -0,5 \cdot 2 + 2,5 &= 1,5 \cdot 2 - 1,5 \\ -1 + 2,5 &= 3 - 1,5 \\ 1,5 &= 1,5 \quad (\text{w}) \end{aligned}$$

Allgemein gilt für den Schnittpunkt $S(x;y)$:

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & y = -0,5x + 2,5 & \\ \text{(II)} & y = 1,5x - 1,5 & \end{array} \quad \begin{array}{l} -0,5x + 2,5 = 1,5x - 1,5 \\ -2x + 2,5 = -1,5 \\ -2x = -4 \\ x = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} | -1,5x \\ | -2,5 \\ | : (-2) \end{array}$$

$$x = 2 \text{ eingesetzt in eine Gleichung: } \begin{array}{l} \text{(I)} \quad y = -0,5x + 2,5 \\ \quad \quad y = -0,5 \cdot 2 + 2,5 \\ \quad \quad y = 1,5 \end{array}$$

$$L = \{(2;1,5)\}$$

Dieses Lösungsverfahren eines linearen Gleichungssystems heißt **Gleichsetzungsverfahren**.

Lehrbeispiel 6

Bestimmen Sie mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens die Lösungsmenge des Gleichungssystems!

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad 2y + 3x = 2 \\ \text{(II)} \quad 8x - 34 = -2y \end{array}$$

Lösung

Im ersten Lösungsschritt werden beide Gleichungen in die Normalform umgeformt.

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & 2y + 3x = 2 & | -3x \\ & 2y = -3x + 2 & | : 2 \\ & y = -1,5x + 1 & \end{array} \quad \begin{array}{lcl} \text{(II)} & 8x - 34 = -2y & | : (-2) \\ & y = -4x + 17 & \end{array}$$

Im zweiten Lösungsschritt werden beide Gleichungsterme gleich gesetzt und die Gleichung wird nach x aufgelöst.

$$\begin{array}{lcl} -1,5x + 1 & = & -4x + 17 \\ 2,5x + 1 & = & 17 \\ 2,5x & = & 16 \\ x & = & 6,4 \end{array} \quad \begin{array}{l} | +4x \\ | -1 \\ | : 2,5 \end{array}$$

Im dritten Lösungsschritt wird der x -Wert in eine der beiden Gleichungen eingesetzt.

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & 2y + 3x = 2 & \\ & 2y + 3 \cdot 6,4 = 2 & | -19,2 \\ & 2y = -17,2 & | : 2 \\ & y = -8,6 & \end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(I)} & 2y + 3x = 2 \\
 & 2 \cdot (-8,6) + 3 \cdot 6,4 = 2 \\
 & -17,2 + 19,2 = 2 \\
 & 2 = 2 \\
 \text{(II)} & 8x - 34 = -2y \\
 & 8 \cdot 6,4 - 34 = (-2) \cdot (-8,6) \\
 & 51,2 - 34 = 17,2 \\
 & 17,2 = 17,2 \quad (w) \\
 & L = \{(6,4; -8,6)\}
 \end{array}$$

Lehrbeispiel 7

Bestimmen Sie die Lösungsmenge!

$$\begin{array}{ll}
 \text{(I)} & 2/3 x - 2/5 y = 4/15 \\
 \text{(II)} & 1/4 x + 1/3 y = 3
 \end{array}$$

Lösung

$$\begin{array}{ll}
 \text{(I)} & 2/3 x - 2/5 y = 4/15 \quad | \cdot \text{HN } 15 \\
 & 10x - 6y = 4 \\
 & -6y = -10x + 4 \\
 & y = 5/3 x - 2/3 \\
 \text{(II)} & 1/4 x + 1/3 y = 3 \quad | \cdot \text{HN } 12 \\
 & 3x + 4y = 36 \\
 & 4y = -3x + 36 \\
 & y = -3/4 x + 9
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 5/3 x - 2/3 = -3/4 x + 9 & | +3/4 x \\
 5/3 x + 3/4 x - 2/3 = 9 & | + 2/3 \\
 29/12 x = 9 \frac{2}{3} & | : 29/12 \\
 x = 4
 \end{array}$$

eingesetzt in (I):

$$\begin{array}{ll}
 2/3 x - 2/5 y = 4/15 \\
 2/3 \cdot 4 - 2/5 y = 4/15 & | - 8/3 \\
 -2/5 y = -36/15 & | : (-2/5) \\
 y = 6
 \end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(I)} & 2/3 x - 2/5 y = 4/15 \\
 & 2/3 \cdot 4 - 2/5 \cdot 6 = 4/15 \\
 & 8/3 - 12/5 = 4/15 \\
 & 40/15 - 36/15 = 4/15 \\
 & 4/15 = 4/15 \\
 \text{(II)} & 1/4 x + 1/3 y = 3 \\
 & 1/4 \cdot 4 + 1/3 \cdot 6 = 3 \\
 & 1 + 2 = 3 \quad (w) \\
 & L = \{(4;6)\}
 \end{array}$$

Lehrbeispiel 8

Der Umfang eines Rechtecks beträgt 48m. Die Länge x ist doppelt so groß wie die Breite y.

Berechnen Sie die Seitenlängen des Rechtecks!

Lösung

$$\begin{array}{ll}
 \text{(I)} & 2x + 2y = 48 \\
 \text{(II)} & x = 2y
 \end{array}$$

In Gleichung (I) kann an die Stelle von x auch der Term 2y geschrieben werden.

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & 2 \cdot 2y + 2y = 48 \\
 & 4y + 2y = 48 \\
 & 6y = 48 \quad | :6 \\
 & y = 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{eingesetzt in (II):} \quad & x = 2 \cdot 8 \\
 & x = 16
 \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & 2x + 2y = 48 \\
 & 2 \cdot 16 + 2 \cdot 8 = 48 \\
 & 32 + 16 = 48 \\
 & 48 = 48 \quad (\text{w}) \\
 \text{(II)} \quad & x = 2y \\
 & 16 = 2 \cdot 8 \\
 & 16 = 16 \quad (\text{w}) \\
 & L = \{(16;8)\}
 \end{aligned}$$

Antwort: Die Rechteckseiten sind 16 cm und 8 cm lang.

Dieses Lösungsverfahren eines linearen Gleichungssystems heißt **Einsetzungsverfahren**.

Lehrbeispiel 9

Bestimmen Sie mithilfe des Einsetzungsverfahrens die Lösungsmenge des Gleichungssystems!

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & 15x - 10y = 54 \\
 \text{(II)} \quad & 4x + 7y = -3
 \end{aligned}$$

Lösung

Im ersten Lösungsschritt wird Gleichung (I) oder (II) nach y aufgelöst.

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & 15x - 10y = 54 \quad | -15x \\
 & -10y = -15x + 54 \quad | :(-10) \\
 & y = 1,5x - 5,4
 \end{aligned}$$

Der isolierte Term für y wird im zweiten Lösungsschritt in die andere Gleichung eingesetzt und diese nach x aufgelöst.

$$\begin{aligned}
 \text{(II)} \quad & 4x + 7y = -3 \\
 & 4x + 7(1,5x - 5,4) = -3 \\
 & 4x + 10,5x - 37,8 = -3 \quad | +37,8 \\
 & 14,5x = 34,8 \quad | :14,5 \\
 & x = 2,4
 \end{aligned}$$

Im dritten Lösungsschritt wird der x-Wert in den y-Term eingesetzt.

$$\begin{aligned}
 y &= 1,5x - 5,4 \\
 y &= 1,5 \cdot 2,4 - 5,4 \\
 &= 3,6 - 5,4 = -1,8
 \end{aligned}$$

Probe

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & 15x - 10y = 54 \\
 & 15 \cdot 2,4 - 10 \cdot (-1,8) = 54 \\
 & 36 + 18 = 54 \\
 & 54 = 54 \quad (\text{w}) \\
 \text{(II)} \quad & 4x + 7y = -3 \\
 & 4 \cdot 2,4 + 7 \cdot (-1,8) = -3 \\
 & 9,6 - 12,6 = -3 \\
 & -3 = -3 \quad (\text{w}) \\
 & L = \{(2,4;-1,8)\}
 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 10

Bestimmen Sie die Lösungsmenge!

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad 2y - 4x = 12 \\ \text{(II)} \quad 17x - 5y = -9 \end{array}$$

Lösung

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} \quad 2y - 4x = 12 & & | +4x \\ \quad \quad 2y = 4x + 12 & & | :2 \\ \quad \quad y = 2x + 6 & & \end{array}$$

eingesetzt in (II):

$$\begin{array}{lcl} \quad \quad 17x - 5y = -9 \\ 17x - 5(2x + 6) = -9 \\ 17x - 10x - 30 = -9 & & | +30 \\ \quad \quad 7x = 21 & & | :7 \\ \quad \quad x = 3 & & \end{array}$$

eingesetzt in den y-Term: $y = 2x + 6$

$$\begin{array}{l} y = 2 \cdot 3 + 6 \\ y = 12 \end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} \quad 2y - 4x = 12 & & \text{(II)} \quad 17x - 5y = -9 \\ 2 \cdot 12 - 4 \cdot 3 = 12 & & 17 \cdot 3 - 5 \cdot 12 = -9 \\ 24 - 12 = 12 & & 51 - 60 = -9 \\ 12 = 12 \quad (w) & & -9 = -9 \quad (w) \end{array}$$

$L = \{(3;12)\}$

Lehrbeispiel 11

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems, indem Sie die beiden Gleichungen addieren!

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad 3x - 2y = 5 \\ \text{(II)} \quad 4x + 2y = 44 \end{array}$$

Lösung

Beim Addieren der beiden Gleichungen muss eine der Variablen heraus fallen.

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} \quad 3x - 2y = 5 & & \\ \text{(II)} \quad 4x + 2y = 44 & & | + \end{array}$$

Es entsteht eine neue Gleichung.

$$\begin{array}{lcl} \text{(III)} \quad 7x = 49 & & | :7 \\ \quad \quad x = 7 & & \end{array}$$

eingesetzt in (I):

$$\begin{array}{rcl} 3x - 2y & = & 5 \\ 3 \cdot 7 - 2y & = & 5 \quad | -21 \\ -2y & = & -16 \quad | : (-2) \\ y & = & 8 \end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 3x - 2y = 5 \\ & 3 \cdot 7 - 2 \cdot 8 = 5 \\ & 21 - 16 = 5 \\ & 5 = 5 \quad (\text{w}) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{(II)} & 4x + 2y = 44 \\ & 4 \cdot 7 + 2 \cdot 8 = 44 \\ & 28 + 16 = 44 \\ & 44 = 44 \quad (\text{w}) \end{array} \qquad L = \{(7;8)\}$$

Dieses Lösungsverfahren eines linearen Gleichungssystems heißt **Additionsverfahren**.

Lehrbeispiel 12

Bestimmen Sie mithilfe des Additionsverfahrens die Lösungsmenge des Gleichungssystems!

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 6x + 8y = 63 \\ \text{(II)} & 14x + 12y = 181 \end{array}$$

Lösung

Im ersten Lösungsschritt müssen eine oder beide Gleichungen so umgeformt werden, dass bei anschließender Addition beider Gleichungen eine Variable heraus fällt.

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 6x + 8y = 63 \quad | \cdot (-3) \\ \text{(II)} & 14x + 12y = 181 \quad | \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & -18x - 24y = -189 \\ \text{(II)} & 28x + 24y = 362 \quad | + \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(III)} & 10x = 173 \quad | : 10 \\ & x = 17,3 \end{array}$$

Im zweiten Lösungsschritt wird der berechnete x-Wert (oder y-Wert) in eine der Ausgangsgleichungen eingesetzt und die zweite Variable bestimmt.

Eingesetzt in (I):

$$\begin{array}{rcl} 6x + 8y & = & 63 \\ 6 \cdot 17,3 + 8y & = & 63 \quad | - 103,8 \\ 8y & = & -40,8 \quad | : 8 \\ y & = & -5,1 \end{array}$$

$$L = \{(17,3; -5,1)\}$$

Lehrbeispiel 13

Bestimmen Sie die Lösungsmenge!

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & -2x - 3y = 48 \\ \text{(II)} & 7x + 5y = -3 \end{array}$$

Lösung

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & -2x - 3y = 48 & | \cdot 5 \\ \text{(II)} & 7x + 5y = -3 & | \cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & -10x - 15y = 240 & \\ \text{(II)} & 21x + 15y = -9 & | + \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{(III)} & 11x = 231 & | : 11 \\ & x = 21 & \end{array}$$

eingesetzt in (I):

$$\begin{array}{lcl} & -2x - 3y = 48 & \\ & -2 \cdot 21 - 3y = 48 & | +42 \\ & -3y = 90 & | : (-3) \\ & y = -30 & \end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & -2x - 3y = 48 \\ & -2 \cdot 21 - 3 \cdot (-30) = 48 \\ & -42 + 90 = 48 \\ & 48 = 48 \quad (w) \\ & L = \{(21; -30)\} \\ \text{(II)} & 7x + 5y = -3 \\ & 7 \cdot 21 + 5 \cdot (-30) = -3 \\ & 147 - 150 = -3 \\ & -3 = -3 \quad (w) \end{array}$$

Lehrbeispiel 14

In einem Hotel befinden sich 108 Einzel- und Doppelzimmer mit insgesamt 156 Betten.

Berechnen Sie jeweils die Anzahl der Einzel- und Doppelzimmer!

Lösung

Im ersten Lösungsschritt muss festgelegt werden, welche gesuchte Größe mit x bzw. y bezeichnet werden soll.

Anzahl Einzelzimmer: x
Anzahl Doppelzimmer : y

Im zweiten Lösungsschritt muss der Text in Gleichungen umgeformt werden.

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & x + y = 108 \\ \text{(II)} & x + 2y = 156 \end{array}$$

Im dritten Lösungsschritt wird die Lösungsmenge mithilfe eines geeigneten Verfahrens bestimmt.

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & x + y = 108 \\ \text{(II)} & x + 2y = 156 & | \cdot (-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & x + y = 108 \\ \text{(II)} & -x - 2y = -156 & | + \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{(III)} & -y = -48 & | \cdot (-1) \\ & y = 48 & \end{array}$$

eingesetzt in (I):

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 108 \\ x + 48 & = & 108 \quad | -48 \\ x & = & 60 \end{array} \quad L = \{(60; 48)\}$$

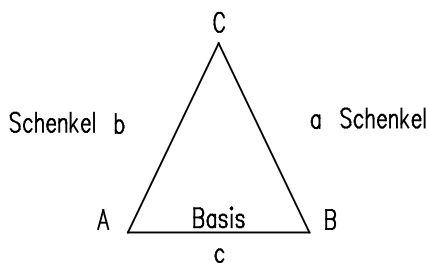
Antwort: Es gibt 60 Einzelzimmer und 48 Doppelzimmer.

Lehrbeispiel 15

Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 34 cm. Jeder Schenkel ist um 5 cm länger als die Basis.

Berechnen Sie die Seitenlängen!

Lösung



$$\begin{array}{ll} \text{Gleichung (I):} & a + b + c = U \\ \text{Gleichung (II):} & a = c + 5 \end{array} \quad \text{da } a = b \text{ folgt } a + a + c = U$$

Gleichung (I) in Gleichung (II) eingesetzt: $2(c + 5) + c = U$

$$\begin{array}{rcl} 2c + 10 + c & = & 34 \quad | -10 \\ 3c & = & 24 \\ c & = & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{eingesetzt in den Term für a: } a = c + 5 \\ a = 8 + 5 = 13 \end{array}$$

Antwort: Die Basis ist 8 cm lang, die Schenkel sind jeweils 13 cm lang.

Lehrbeispiel 16

In einem Labor werden 15 Liter hochprozentiger Alkohol mit 10 Liter Alkohol von niedrigerem Alkoholgehalt gemischt. Es entsteht eine Mischung von 25 Liter 70 %igem Alkohol. Werden dagegen 12 Liter des hochprozentigen Alkohols und 28 Liter mit niedrigerem Prozentwert gemischt, entsteht 62,5 %iger Alkohol.

Berechnen Sie die Prozentgehalte der Alkoholsorten!

Lösung

hochprozentig	x %	reiner Alkohol:
Volumen (in Liter)	15	$15 \cdot x : 100$

Niedrig prozentig	y %	reiner Alkohol
Volumen (in Liter)	10	$10 \cdot y : 100$

$$\text{Gleichung (I)} : 15 \cdot x/100 + 10 \cdot y/100 = 25 \cdot 70/100 \quad | \cdot 100$$

$$\text{Gleichung (II)} : 12 \cdot x/100 + 28 \cdot y/100 = 40 \cdot 62,5/100 \quad | \cdot 100$$

$$\text{Gleichung (I)} : 15x + 10y = 1750 \quad | \cdot (-4)$$

$$\text{Gleichung (II)} : 12x + 28y = 2500 \quad | \cdot 5$$

$$\text{Gleichung (I)} : -60x - 40y = -7000$$

$$\text{Gleichung (II)} : 60x + 140y = 12500 \quad | +$$

$$\text{Gleichung (III)} \quad 100y = 5500$$

$$y = 55$$

eingesetzt in (I):

$$15x + 10y = 1750$$

$$15x + 10 \cdot 55 = 1750 \quad | -550$$

$$15x = 1200 \quad | : 15$$

$$x = 80$$

Antwort: Der hochprozentige Alkohol hat einen Gehalt von 80 %, der Alkohol mit dem niedrigeren Prozentgehalt 55 % Alkoholgehalt.

Lehrbeispiel 17

Ein Flugzeug benötigt für eine 1200 km lange Strecke eine Flugzeit von zwei Stunden. Dabei fliegt es in Windrichtung. Auf dem Rückflug beträgt die Flugzeit 2 ½ Stunden.

Berechnen Sie die Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs und die Windgeschwindigkeit!

Lösung

Eigengeschwindigkeit (in km/h)	v_e
Windgeschwindigkeit (in km/h)	v_w

Geschwindigkeit mit dem Wind: $v_e + v_w$

$$\text{Geschwindigkeit (v)} = \frac{\text{Weg (s)}}{\text{Zeit (t)}} \quad \Leftrightarrow \quad s = v \cdot t$$

$$\text{Gleichung (I)} \quad 1200 = (v_e + v_w) \cdot 2$$

$$\text{Gleichung (II)} \quad 1200 = (v_e - v_w) \cdot 2,5$$

$$(I) \quad 1200 = 2 v_e + 2 v_w \quad | \cdot 5$$

$$(II) \quad 1200 = 2,5 v_e - 2,5 v_w \quad | \cdot 4$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{(I)} & 6000 & = 10 v_e + 10 v_w \\
 \text{(II)} & 4800 & = 10 v_e - 10 v_w \quad | + \\
 \text{(III)} & 10800 & = 20 v_e \quad | : 20 \\
 & 540 & = v_e
 \end{array}$$

eingesetzt in (I):

$$\begin{array}{rcl}
 1200 & = 2 \cdot 540 + 2 v_w & | - 1080 \\
 120 & = 2 v_w & | : 2 \\
 v_w & = 60
 \end{array}$$

$$L = \{(540; 60)\}$$

Antwort: Die Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs beträgt 540 km/h, die Windgeschwindigkeit beträgt 60 km/h.

2.2.4 Umkehrfunktionen

Im Koordinatensystem ist der Graf der Funktion $f(x) = 2x + 4$ dargestellt.

Der Abbildung ist zu entnehmen, welche x-Werte den Funktionswerten -4 ; 2 und 6 zugeordnet werden.

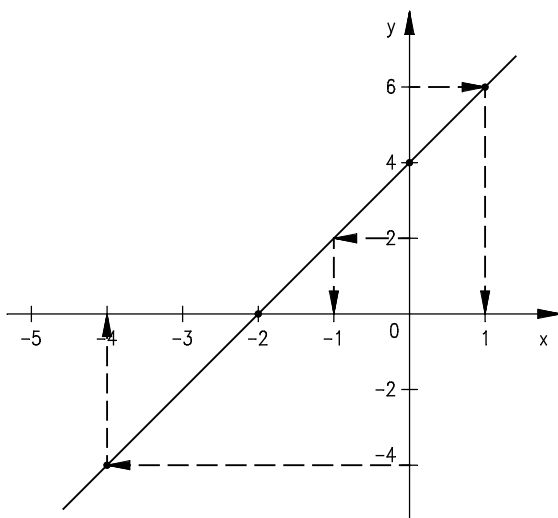


Abbildung 4 Graf der Funktion $f(x) = 2x + 4$

Lehrbeispiel 1

Berechnen Sie die Stelle x , an welcher die Funktion f den Funktionswert 12 und an welcher Stelle -6 annimmt!

Lösung

$$\begin{array}{rcl}
 f(x) & = & 2x + 4 \\
 f(x) & = & 12 \\
 12 & = & 2x + 4 \quad | - 4 \\
 8 & = & 2x \quad | : 2 \\
 x & = & 4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 f(x) & = & 2x + 4 \\
 f(x) & = & -6 \\
 -6 & = & 2x + 4 \quad | - 4 \\
 -10 & = & 2x \quad | : 2 \\
 x & = & -5
 \end{array}$$

Antwort: Die Funktion nimmt an der Stelle $x = 4$ den Funktionswert 12, an der Stelle $x = -5$ den Funktionswert -6 an.

Jeder x -Wert führt zu einem bestimmten y -Wert. Geht man nun umgekehrt von einem y -Wert aus, so gelangen wir **eindeutig** zu dem zugehörigen x -Wert. Diese Eigenschaft einer linearen Funktion $f(x)$ nennt man **umkehrbar eindeutig**.

f sei eine lineare Funktion, d.h. sie ist umkehrbar eindeutig. Ihre Definitionsmenge ist D_f , ihre Wertemenge W_f . Dann heißt die Funktion $f^{-1}: f(x) \rightarrow x$ mit $D(f^{-1}) = W_f$ und $W(f^{-1}) = D_f$ die **Umkehrfunktion von f** .

Lehrbeispiel 2

Geben Sie die Zuordnungsvorschrift der Umkehrfunktion f^{-1} an, die jedem Funktionswert von f wieder den zugehörigen x -Wert zuordnet!

Lösung

Funktion $f(x)$	Umkehrfunktion f^{-1}
$-2 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -2$
$-1 \rightarrow 2$	$2 \rightarrow -1$
$0 \rightarrow 4$	$4 \rightarrow 0$
$1 \rightarrow 6$	$6 \rightarrow 1$
$2 \rightarrow 8$	$8 \rightarrow 2$
\vdots	\vdots
$x \rightarrow 2x + 4$	$y \rightarrow \boxed{\dots\dots\dots}$

Im **ersten Lösungsschritt** wird die Funktionsgleichung nach x aufgelöst.

$$\begin{array}{rcl}
 y = 2x + 4 & | & -4 \\
 y - 4 = 2x & | & : 2 \\
 x = 1/2 y - 2
 \end{array}$$

Im **zweiten Lösungsschritt** wird die Gleichung der Umkehrfunktion in der üblichen Darstellungsform geschrieben, indem x und y miteinander vertauscht werden.

$$y = 1/2 x - 2$$

Antwort: Die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion f^{-1} lautet: $y = 1/2x - 2$

Lehrbeispiel 3

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion $g(x) = 1/3x + 4$!

Lösung

$$\begin{array}{rcl}
 g(x) = 1/3 x + 4 \\
 y = 1/3 x + 4 & | & -4 \\
 y - 4 = 1/3 x & | & : 1/3 \\
 3y - 12 = x
 \end{array}$$

$$g^{-1}: y = 3x - 12$$

Antwort: Die Funktionsgleichung von g^{-1} lautet: $y = 3x - 12$

Aufgabe 1

In einer Prüfung haben die Kandidaten wie folgt abgeschnitten:

56 Punkte (Note 2); 35 Punkte (Note 3); 28 Punkte (Note 4); 20 Punkte (Note 4);
43 Punkte (Note 2).

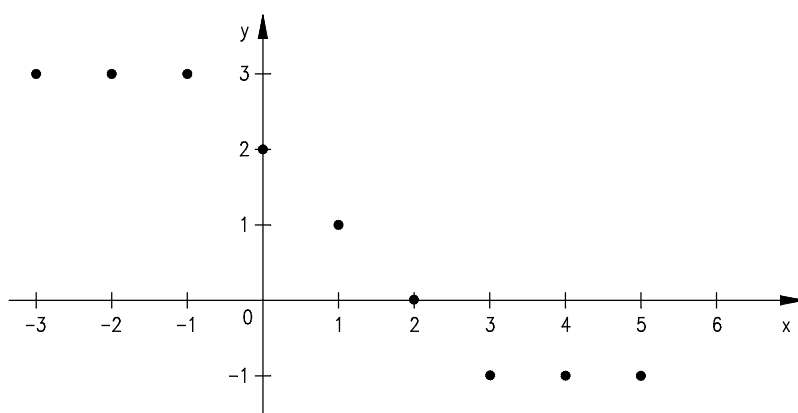
1.1 Bestimmen Sie Definitions- und Wertemenge der Funktion!

1.2 Zeichnen Sie das zugehörige Pfeildiagramm!

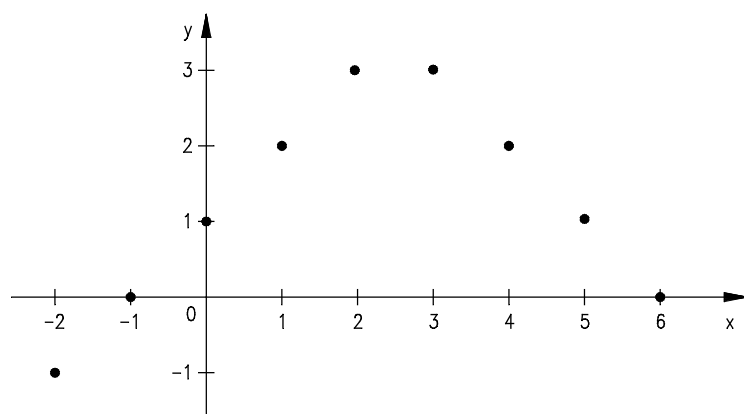
Aufgabe 2

Bestimmen Sie anhand des Funktionsgraphen die Definitions- und Wertemenge!

2.1



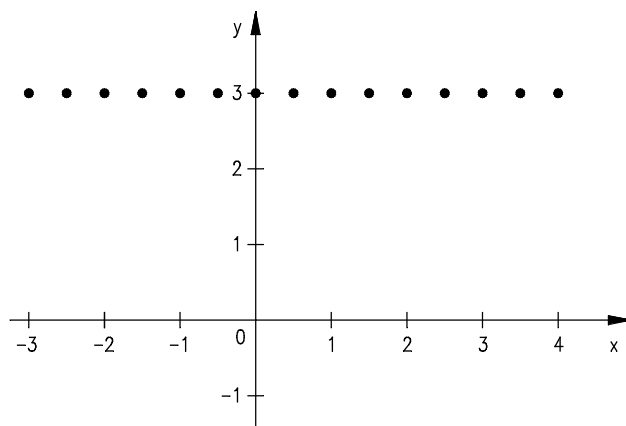
2.2

**Aufgaben**

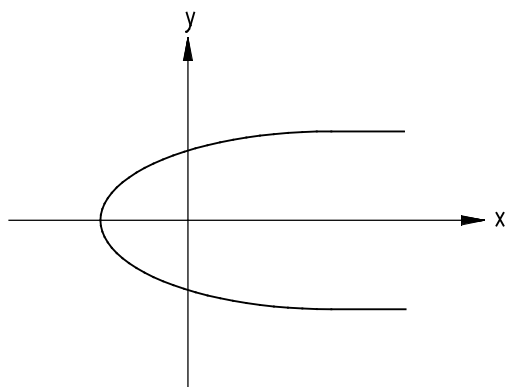
Aufgabe 3

Entscheiden Sie, ob es sich bei dem Grafen um einen Funktionsgraphen handelt!

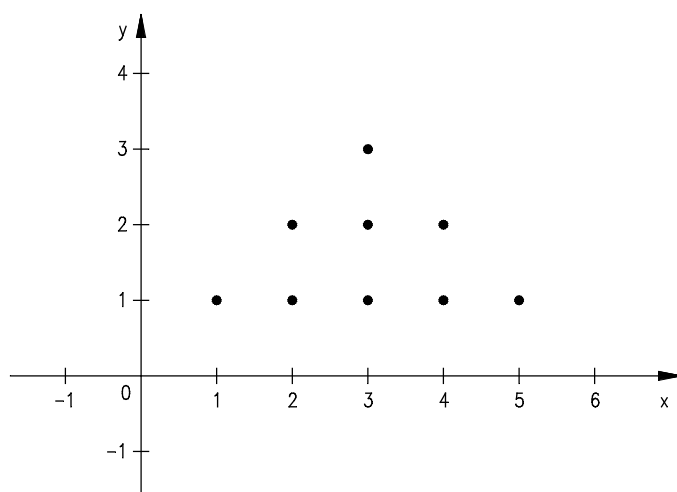
3.1



3.2



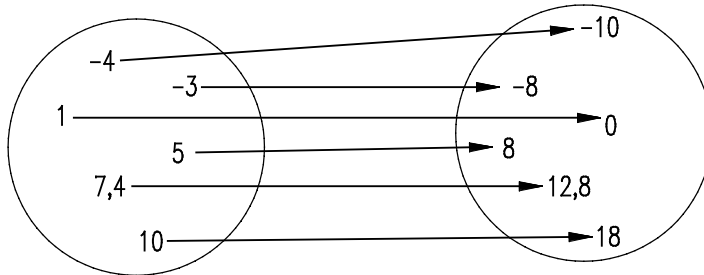
3.3



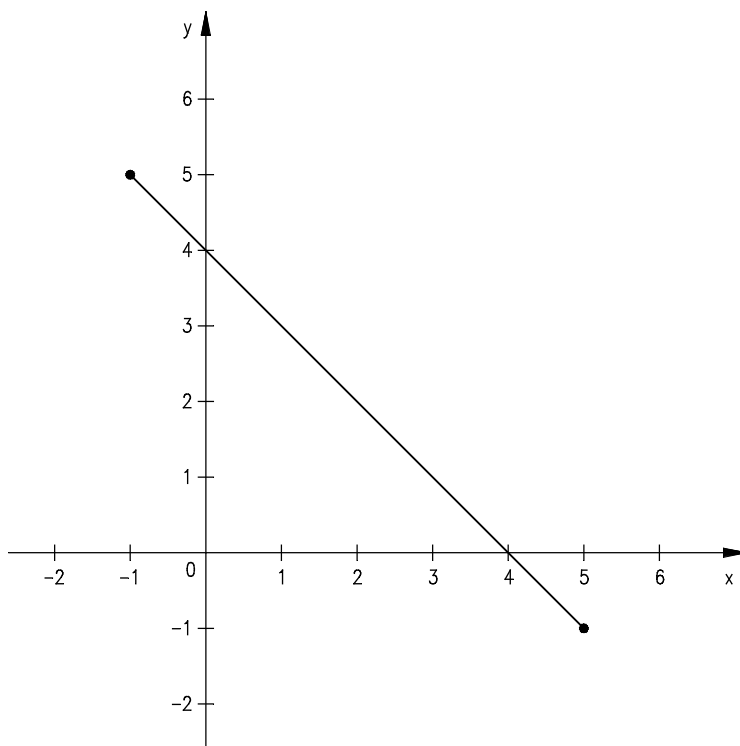
Aufgabe 4

Geben Sie die Definitionsmenge und die Zuordnungsvorschrift der dargestellten Funktion an!

4.1



4.2

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Steigung der Ursprungsgeraden durch den Punkt P!

5.1 $P(-6;-2)$

5.2 $P(-8;6)$

Aufgabe 6

Zeichnen Sie den Grafen einer linearen Funktion, der durch die Punkte P und Q geht! Berechnen Sie die Funktionsgleichung!

6.1 $P(-3;5); Q(-6;6)$

6.2 $P(4;-2); Q(1;0)$

Aufgabe 7

Bestimmen Sie zeichnerisch die Nullstelle der Funktion! Kontrollieren Sie durch Rechnung!

7.1 $f(x) = -1,5x + 0,5$

7.2 $g(x) = 2x - 8$

Aufgabe 8

Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden.

8.1 $f(x) = -3x - 10$
 $g(x) = 0,5x - 3$

8.2 $f(x)$ verläuft durch $P(-2;1)$ und $Q(2;-5)$
 $g(x)$ verläuft durch $R(6;0)$ und $T(-3;-3)$

Aufgabe 9

Bestimmen Sie rechnerisch die Lösungsmenge!

9.1 (I) $3x + 6y = 90$
 (II) $2y - 4x = 140$

9.2 (I) $4x + 2y = 36$
 (II) $-8y = 6x - 20$

9.3 (I) $4y + 8x = -84$
 (II) $-50 - 6y = 7x$

9.4 (I) $2y - [2x - 2(6 + 4x)] = 5(3 - y)$
 (II) $3[6x - (7y + 5)] = 9x - 7(y + 2)$

Aufgabe 10

Die Kosten für einen Leihwagen setzen sich aus einer Grundgebühr und den Kosten für jeden zurück gelegten Kilometer zusammen. Für 160 Kilometer zahlt Herr A. insgesamt einen Betrag von € 40,10. Frau B. zahlt für eine Strecke von 120 Kilometern 35,70 €.

Berechnen Sie die Grundgebühr und die Kosten pro Kilometer!

Aufgabe 11

Eine Messinglegierung mit einem Kupferanteil von 85 % soll durch Zuschmelzen einer Messinglegierung mit einem Kupferanteil von 55 % auf einen Kupfergehalt von 72 % reduziert werden. Insgesamt sollen 100 Kilogramm Messing der neuen Legierung entstehen.

Berechnen Sie die Anteile der ursprünglichen Legierungen!

Aufgabe 12

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion!

12.1 $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$

12.2 $g(x) = -5x - 10$

Eine Maschinenfabrik kalkuliert für die Entwicklung einer Maschine Kosten in Höhe von 1 500 000 €. Die Produktionskosten einer Maschine werden mit 50 000 € veranschlagt. Die Firma rechnet mit einem Verkaufserlös von 150 000 €.

- 1.1 *Berechnen Sie, ab welcher Stückzahl verkaufter Maschinen die Maschinenfabrik mit positiven Einnahmen rechnen kann!*
- 1.2 *Berechnen Sie die Höhe der dann erzielten Einnahmen!*
- 1.3 *Stellen Sie die Lösung grafisch dar!*

**Realisierung
Komplexaufgabe
„Bestimmung einer
Grenzstückzahl“**

Lösungen

Lösungsanhang

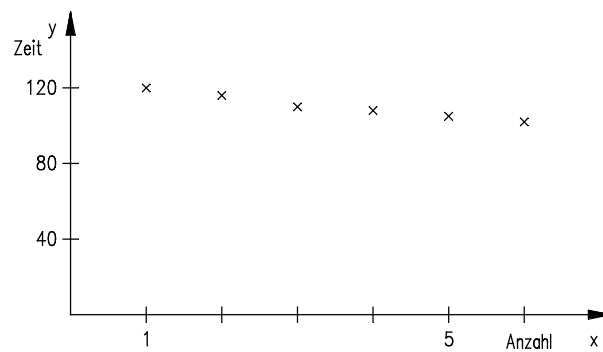
1 Zuordnung und ihre Darstellungen

Aufgabe 1.1

1A → 120 min → 120 min
 2A → 58 min → 116 min
 3A → 37 min → 111 min
 4A → 27 min → 108 min
 5A → 21 min → 105 min
 6A → 17 min → 102 min

Anzahl der Arbeiter	Zeit in min
1	120
2	116
3	111
4	108
5	105
6	102

Aufgabe 1.2



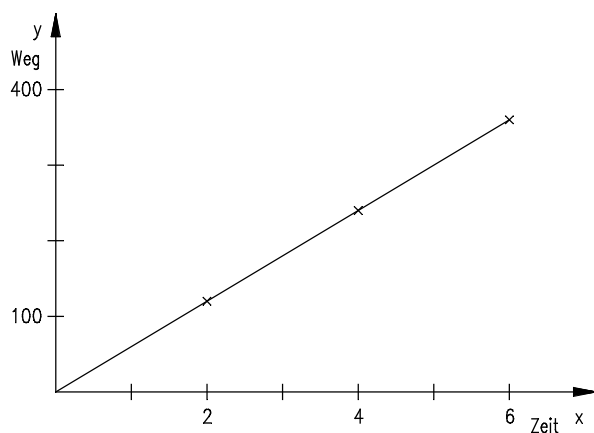
Aufgabe 2.1

Zeit (h)	Weg (km)
4	240
6	360
2	120

$$k = \frac{240}{4} = 60$$

Aufgabe 2.2

$$x \rightarrow 60x$$



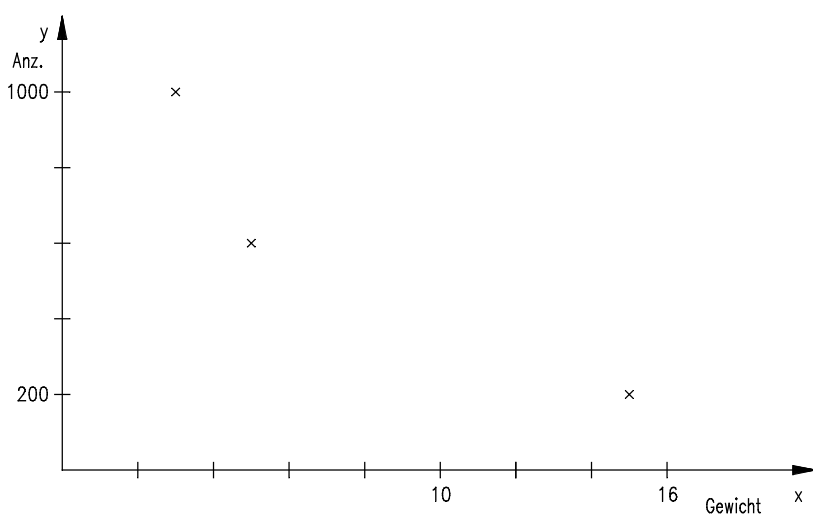
Aufgabe 3.1

Gewicht (kg)	Anzahl der Packungen
3	1000
5	600
15	200

$$c = 3 \cdot 1000 = 3000$$

$$x \rightarrow \frac{3000}{x}$$

Aufgabe 3.2



Aufgabe 4.1

10 km \rightarrow 28,5 min

$k = 2,85$ k gibt die Zeit pro km an.

$x \rightarrow 2,85x$

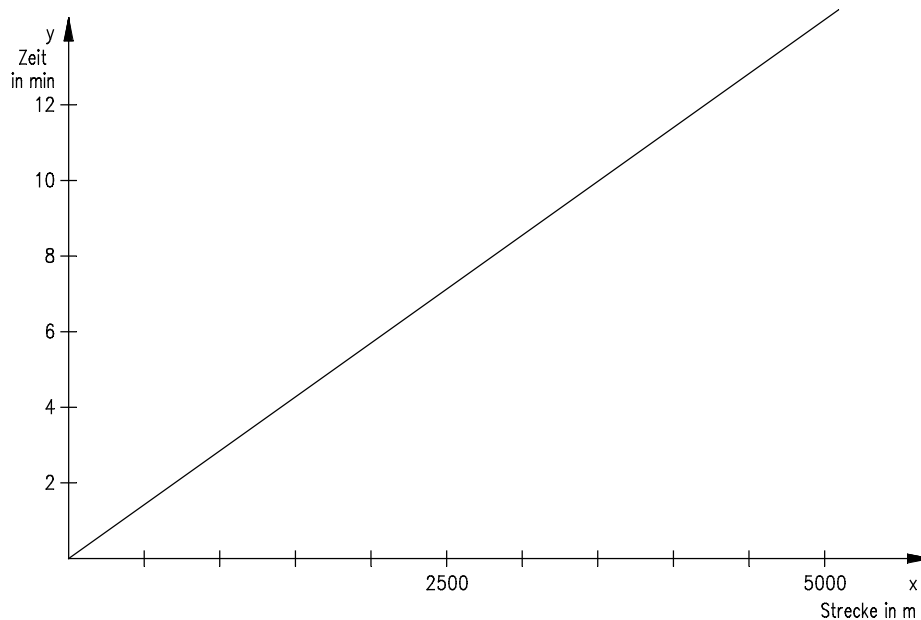
0,1 km: $2,85 \text{ min/km} \cdot 0,1 \text{ km} = 0,285 \text{ min}$

0,4 km: $2,85 \text{ min/km} \cdot 0,4 \text{ km} = 1,14 \text{ min}$

1,0 km: $2,85 \text{ min/km} \cdot 1,0 \text{ km} = 2,85 \text{ min}$

5,0 km: $2,85 \text{ min/km} \cdot 5,0 \text{ km} = 14,25 \text{ min}$

Aufgabe 4.2



Aufgabe 5.1

21 Zähne \rightarrow 4,80 m

$c = 21 \cdot 4,80 = 100,8$

$x \rightarrow \frac{100,8}{x}$

13 Zähne: $100,8 : 13 = 7,75 \text{ m}$

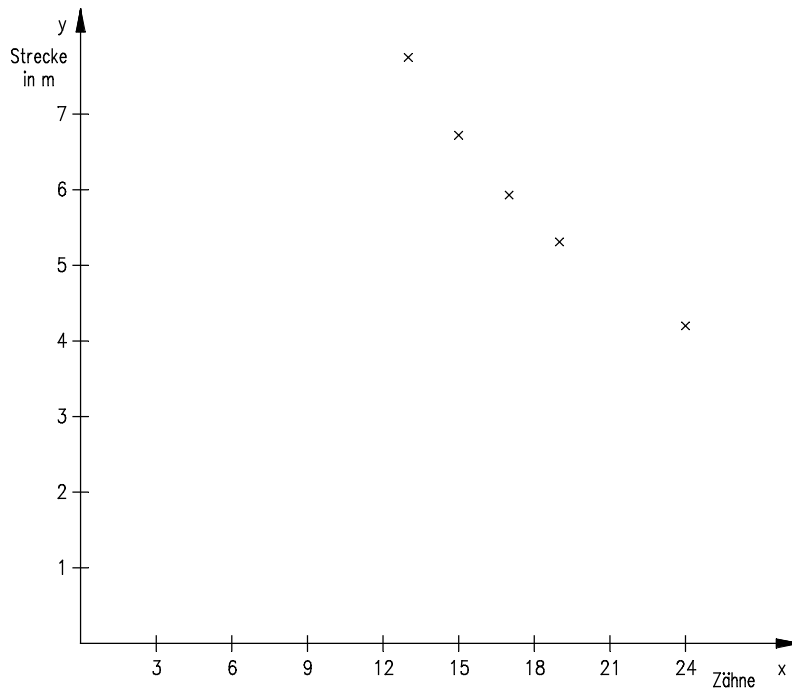
15 Zähne: $6,72 \text{ m}$

17 Zähne: $5,93 \text{ m}$

19 Zähne: $5,31 \text{ m}$

24 Zähne: $4,20 \text{ m}$

Aufgabe 5.2



Aufgabe 6

Fläche in m ²	Schichtdicke in cm	Erdmenge in Tonnen
600	10	78
100	60	78
100	15	19,5
800	15	156

Antwort: Es werden 156 Tonnen Erde abgefahren.

Aufgabe 7.1

$$\begin{aligned}
 x + 6 &= -11 & | -6 \\
 x &= -17 \\
 L &= \{-17\}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.2

$$\begin{aligned}
 3x &= 54 & | :3 \\
 x &= 18 \\
 L &= \{18\}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.3

$$\begin{aligned}
 -3x - 21 &= -63 & | + 21 \\
 -3x &= -42 & | : (-3) \\
 x &= 14 \\
 L &= \{14\}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.4

$$\begin{aligned}
 -[3(1 - x) - 5(6 - x)] &= -3(9 - x) + 14 \\
 -[3 - 3x - 30 + 5x] &= -27 + 3x + 14 \\
 27 - 2x &= 3x - 13 & | - 3x \\
 -5x + 27 &= -13 & | - 27 \\
 -5x &= -40 & | : (-5) \\
 x &= 8 \\
 L &= \{8\}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.5

$$\begin{aligned}
 7x - [5(x - 7)^2 + 3(x - 1)^2] &= 21 - 8x^2 - 20 \\
 7x - [5(x^2 - 14x + 49) + 3(x^2 - 2x + 1)] &= 1 - 8x^2 \\
 7x - 8x^2 + 76x - 248 &= 1 - 8x^2 \\
 83x &= 249 & | : 83 \\
 x &= 3 \\
 L &= \{3\}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.6

$$\begin{aligned}
 \frac{7-x}{2} + \frac{14x+6}{3} &= \frac{18(3+x)}{9} + 4x - \frac{4}{9} & \text{HN: } 18 \\
 \frac{18(7-x)}{2} + \frac{18(14x+6)}{3} &= \frac{18(3+x)18}{9} + 4x \cdot 18 - \frac{4 \cdot 18}{9} \\
 75x + 99 &= 108x + 100 & | - 108x \\
 -33x + 99 &= 100 & | - 99 \\
 -33x &= 1 & | : (-33) \\
 x &= -1/33 \\
 L &= \{-1/33\}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.7

$$\frac{x}{b} - a = ax \quad | +a \quad b \neq 0$$

$$\frac{x}{b} = ax + a \quad | -ax$$

$$\frac{x}{b} - ax = a$$

$$x \left(\frac{1}{b} - a \right) = a \quad | : \left(\frac{1}{b} - a \right)$$

$$x = \frac{a}{\frac{1}{b} - a}$$

$$x = \frac{ab}{1 - ab}$$

$$L = \left\{ \frac{ab}{1 - ab} \right\}$$

Aufgabe 8.1

$$\frac{5 - 3x}{3x + 5} = \frac{12 - 5x}{5x + 1}$$

$$3x + 5 = 0$$

$$3x = -5$$

$$x = -5/3$$

$$5x + 1 = 0$$

$$5x = -1$$

$$x = -1/5$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1/5; -5/3\}$$

$$HN: (3x + 5)(5x + 1)$$

$$\frac{(5 - 3x)(3x + 5)(5x + 1)}{3x + 5} = \frac{(12 - 5x)(3x + 5)(5x + 1)}{5x + 1}$$

$$22x + 5 = 11x + 60 \quad | -11x$$

$$11x + 5 = 60 \quad | -5$$

$$11x = 55 \quad | :11$$

$$x = 5$$

$$L = \{5\}$$

Aufgabe 8.2

$$\frac{4x - 5}{3x + 3} - \frac{3x + 4}{5x - 5} = \frac{11x^2 - 69x + 58}{15x^2 - 15}$$

$$3x + 3 = 3(x + 1)$$

$$5x - 5 = 5(x - 1)$$

$$15x^2 - 15 = 15(x + 1)(x - 1)$$

$$HN: 15(x + 1)(x - 1)$$

$$3(x + 1) = 0$$

$$x = -1$$

$$5(x - 1) = 0$$

$$x = 1$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

$$\frac{(4x - 5)(x + 1)(x - 1)15}{3(x + 1)} - \frac{(3x + 4)(x + 1)(x - 1)15}{5(x - 1)} = \frac{(11x^2 - 69x + 58)[15(x^2 - 1)]}{15(x^2 - 1)}$$

$$-66x + 13 = -69x + 58$$

$$3x + 13 = 58$$

$$3x = 45$$

$$x = 15$$

$$L = \{15\}$$

Aufgabe 9

vor dem Mischen	nach dem Mischen	in Volumen-Prozent
96 %iger Alkohol x Liter		$x \cdot 96/100$
20 %iger Alkohol 1/2 Liter		$0,5 \cdot 20/100$
	32%iger Alkohol (x + 0,5) Liter	$(x + 0,5) 32/100$

Gleichung: $x \cdot 96/100 + 0,5 \cdot 20/100 = (x + 0,5) 32/100$

$$x = 0,09375$$

Antwort: Es werden 93,75 cm³ vom 96 %igen Alkohol benötigt.

Aufgabe 10.1

$$v_F = 550 \text{ km/h} \quad v_J = 950 \text{ km/h}$$

	Verkehrsflugzeug	Jumbo
Flugzeit	x	x - 2
Geschwindigkeit	550	950
Strecke	550x	950(x - 2)

Gleichung: $550x = 950(x - 2)$

$$x = 4,75$$

Antwort: Nach einer Flugzeit von 4,75 Stunden für das Verkehrsflugzeug treffen sich beide Flugzeuge.

Aufgabe 10.2**Zurückgelegte Strecke:** $550 \cdot x = 2612,5$ **Antwort:** Die Flugzeuge sind 2612,5 km von Düsseldorf entfernt.**Aufgabe 11.1**

$$3(7 - 2x) - 12 \geq 8 - 7x$$

$$x + 9 \geq 8$$

$$x \geq -1$$

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$$

Aufgabe 11.2

$$2(x - 2)(x - 5) < 2x^2 - 4x - 10$$

$$2x^2 - 14x + 20 < 2x^2 - 4x - 10$$

$$-10x < -30 \quad | : (-30)$$

$$x > 3$$

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$$

Aufgabe 12Angebot 1: $1000 + 0,06 \cdot x$ Angebot 2: $1250 + 0,04 \cdot x$ **Ungleichung:** $1000 + 0,06 x > 1250 + 0,04 x$
 $x > 12500$ **Antwort:** Von einem monatlichen Umsatz von $> 12.500 \text{ €}$ an wird das 1. Angebot günstiger.**2 Funktionen als eindeutige Zuordnungen****Aufgabe 1.1**

$$D = \{56; 43; 35; 28; 20\} \quad W = \{2; 3; 4\}$$

Aufgabe 1.2

$$56 \rightarrow 2$$

$$43 \rightarrow 2$$

$$35 \rightarrow 3$$

$$28 \rightarrow 4$$

$$20 \rightarrow 4$$

Aufgabe 2.1

$$D = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$W = \{3; 2; 1; 0; -1\}$$

Aufgabe 2.2

$$D = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$W = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$$

Aufgabe 3.1

$$\text{Ja! } f(x) = 3$$

Aufgabe 3.2

Nein! Zuordnung ist nicht eindeutig.

Aufgabe 3.3

Nein! Zuordnung ist nicht eindeutig.

Aufgabe 4.1

$$D = \{x \in \mathbb{Q}; -4; -3; 1; 5; 7,4; 10\} \quad f(x) = 2x - 2$$

Aufgabe 4.2

$$D = \{x \in \mathbb{Q}; -1 \leq x \leq 5\} \quad f(x) = -x + 4$$

Aufgabe 5.1

$$\begin{aligned} P(-6; -2) \quad & f(x) = mx \\ & -2 = m \cdot (-6) \\ & \frac{1}{3} = m \\ & f(x) = \frac{1}{3}x \end{aligned}$$

Aufgabe 5.2

$$\begin{aligned} P(-8; 6) \quad & f(x) = mx \\ & 6 = m \cdot (-8) \\ & -\frac{6}{8} = m \\ & f(x) = -\frac{3}{4}x \end{aligned}$$

Aufgabe 6.1

$$P(-3; 5) \quad Q(-6; 6)$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 5}{-6 - (-3)} \\ m &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x + b$$

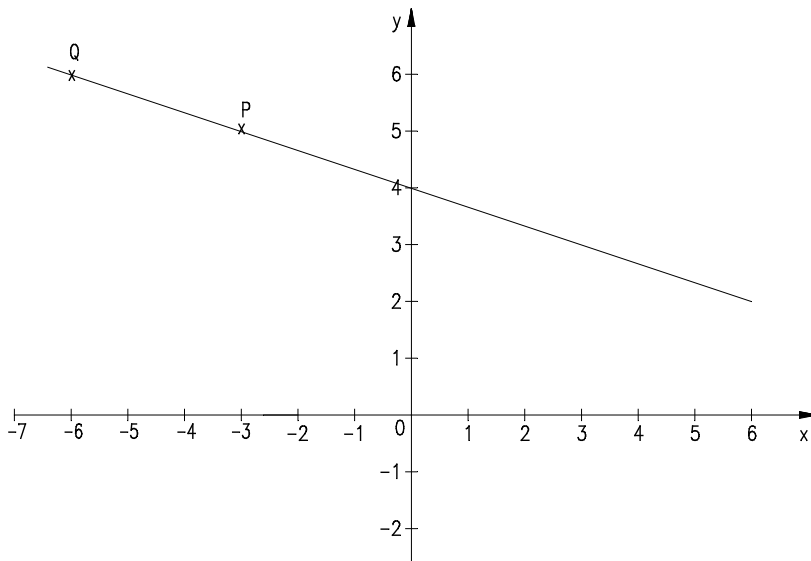
für $P(-3;5)$

$$f(-3) = -\frac{1}{3} \cdot (-3) + b$$

$$5 = 1 + b$$

$$b = 4$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x + 4$$



Aufgabe 6.2

$P(4;-2)$ $Q(1;0)$

$$m = \frac{0 - (-2)}{1 - 4}$$

$$m = -\frac{2}{3}$$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x + b$$

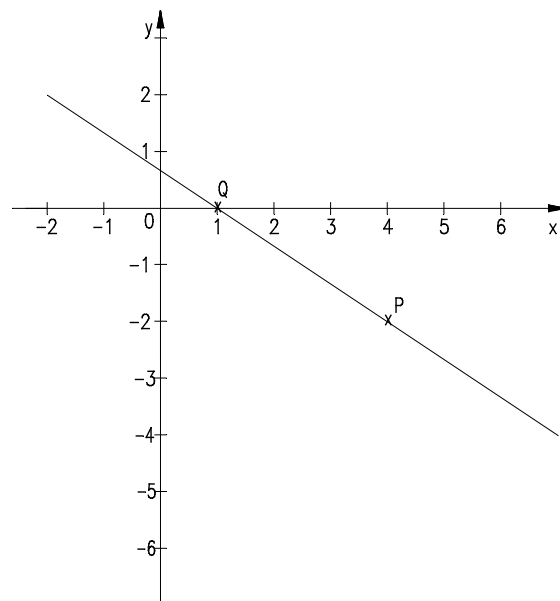
für $Q(1;0)$

$$f(1) = -\frac{2}{3}x + b$$

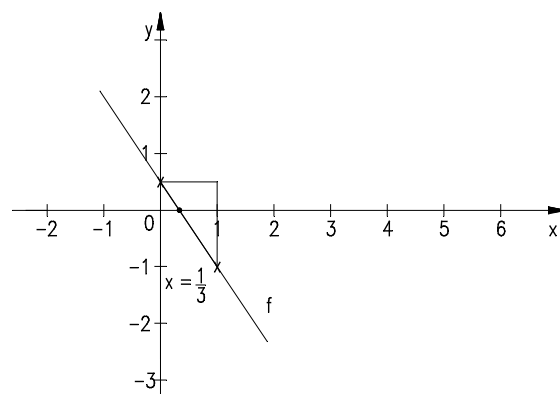
$$0 = -\frac{2}{3} \cdot 1 + b$$

$$\frac{2}{3} = b$$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$



Aufgabe 7.1



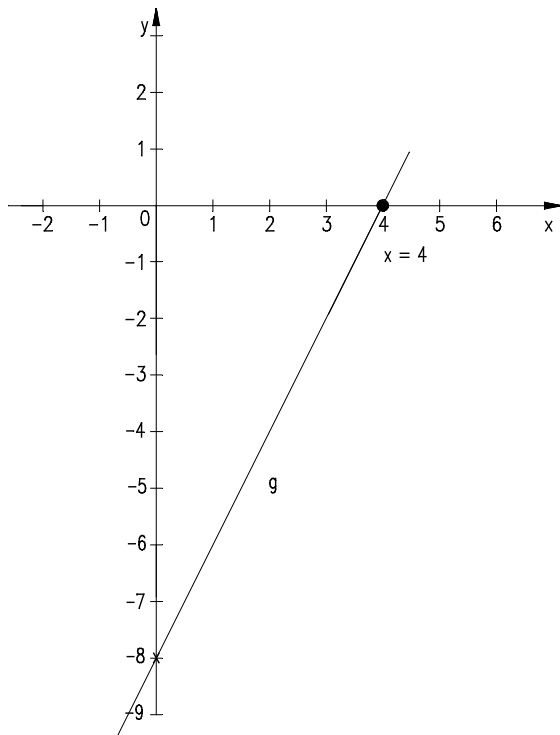
$$f(x) = -1,5x + 0,5$$

$$y = 0$$

$$0 = -1,5x + 0,5$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 7.2



$$g(x) = 2x - 8$$

$$y = 0$$

$$0 = 2x - 8$$

$$x = 4$$

Aufgabe 8.1

$$f(x) = -3x - 10 \quad g(x) = 0,5x - 3$$

$$f(x) = g(x)$$

$$-3x - 10 = 0,5x - 3$$

$$x = -2$$

$$\begin{aligned} f(-2) &= -3 \cdot (-2) - 10 \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$S(-2; -4)$$

Aufgabe 8.2

$f(x)$ durch $P(-2; 1)$ und $Q(2; -5)$

$$m = \frac{-5 - 1}{2 - (-2)} = -1,5$$

$$f(x) = -1,5x + b$$

für P: $f(-2) = -1,5 \cdot (-2) + b$

$$1 = 3 + b$$

$$b = -2$$

$$f(x) = -1,5x - 2$$

$g(x)$ durch $R(6; 0)$ und $T(-3; -3)$

$$m = \frac{-3 - 0}{-3 - 6} = \frac{1}{3}$$

$$g(x) = 1/3x + b \quad \text{für T: } g(-3) = \frac{1}{3} \cdot (-3) + b$$

$$-3 = -1 + b$$

$$b = -2$$

$$g(x) = 1/3x - 2$$

Schnittpunkt S: $f(x) = g(x)$

$$-1,5x - 2 = \frac{1}{3}x - 2$$

$$x = 0$$

für g(x): $g(x) = \frac{1}{3}x - 2$

$$g(0) = -2 \quad S(0; -2)$$

Aufgabe 9.1

$$\begin{array}{rcl} 3x + 6y & = & 90 \\ -4x + 2y & = & 140 \quad | \cdot (-3) \\ \hline 15x & = & -330 \\ x & = & -22 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 6y & = & 90 - 3x \\ 6y & = & 156 \\ y & = & 26 \end{array}$$

$$L = \{(-22; 26)\}$$

Aufgabe 9.2

$$\begin{array}{rcl} 4x + 2y & = & 36 \quad | \cdot 4 \\ -6x - 8y & = & -20 \\ \hline 10x & = & 124 \\ x & = & 12,4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -8y & = & 6x - 20 \\ -8y & = & 54,4 \\ y & = & -6,8 \end{array}$$

$$L = \{(12,4; -6,8)\}$$

Aufgabe 9.3

$$\begin{array}{rcl} 4y + 8x & = & -84 \quad | \cdot (3) \\ -6y - 7x & = & 50 \quad | \cdot (2) \\ \hline 10x & = & -152 \\ x & = & -15,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 4y & = & -8x - 84 \\ 4y & = & 121,6 - 84 \\ y & = & 9,4 \end{array}$$

$$L = \{(-15,2; 9,4)\}$$

Aufgabe 9.4

$$\begin{array}{l} 2y - (2x - 12 - 8x) = 15 - 5y \\ 3 \cdot (6x - 7y - 5) = 9x - 7y - 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7y + 6x = 3 \\ -14y + 9x = 1 \end{array}$$

$$21x = 7$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$L = \{1/3; 1/7\}$$

$$7y + 2 = 3$$

$$7y = 1$$

$$y = \frac{1}{7}$$

Aufgabe 10

$$160x + y = 40,10$$

$$120x + y = 35,70$$

$$y = 22,50$$

$$160x = 40,10 - 22,50$$

$$x = 0,11$$

Antwort: Die Grundgebühr beträgt 22,50 €; der Kilometerpreis beträgt 0,11 €.

Aufgabe 11

Messing 85 %: x

Messing 55 %: y

$$x + y = 100$$

$$x = 100 - y$$

$$0,85x + 0,55y = 0,72 \cdot 100$$

$$x = 56 \frac{2}{3}$$

$$y = 43 \frac{1}{3}$$

Antwort: Der Anteil des 85 %igen Messings beträgt $56 \frac{2}{3}$ kg; der Anteil des 55 %igen Messings beträgt $43 \frac{1}{3}$ kg.

Aufgabe 12.1

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 4$$

$$y = \frac{1}{2}x + 4$$

$$y - 4 = \frac{1}{2}x$$

$$2y - 8 = x$$

$$f^{-1}(x): y = 2x - 8$$

Aufgabe 12.2

$$g(x) = -5x - 10$$

$$y = -5x - 10$$

$$y + 10 = -5x$$

$$-0,2y - 2 = x$$

$$g^{-1}(x) = -1/5x - 2$$

Komplexaufgabe „Bestimmung einer Grenzstückzahl“

Aufgabe 1

Festlegen der Variablen

Anzahl der verkauften Maschinen x

Kosten y_K

Erlös y_E

Kostengleichung

$$1\,500\,000 + 50\,000 x = y_K$$

Erlösgleichung

$$150\,000 x = y_E$$

Aufgabe 1.1

Wenn $y_K = y_E$, sind Kosten und Erlös gleich groß.

$$(I) \quad y = 1\,500\,000 + 50\,000 x$$

$$(II) \quad y = 150\,000 x$$

$$(I) \quad -3y = -4\,500\,000 - 150\,000 x$$

$$(II) \quad y = 150\,000 x$$

$$-2y = -4\,500\,000$$

$$y = 2\,250\,000$$

eingesetzt in (II):

$$x = \frac{2\,250\,000}{150\,000} \approx 15$$

Antwort: Wenn von der Maschine 15 Stück verkauft werden, sind Kosten und Erlös gleich groß; d.h. wenn die Firma mehr als 15 Maschinen verkauft, hat sie positive Einnahmen.

Aufgabe 1.2

$$y_E = 2\,250\,000$$

Antwort: Die dann erzielten Einnahmen betragen 2 250 000 Euro.

Aufgabe 1.3