

Zahlen kennen und Grundrechenarten anwenden

Die Basis der mathematischen Modelle und Verfahren bilden definierte Symbole und Zahlendarstellungen sowie elementare Rechenregeln.

Je nach Ausbildung und beruflichem Werdegang ist diese Basis unterschiedlich präsent. Technikerinnen und Techniker müssen aber in ihrem Berufsfeld die mathematischen Grundlagen sicher beherrschen, um sie als Werkzeug zur Lösung von technischen Problemen einsetzen zu können.

Daher werden in den Lernbereichen 1 bis 3 die mathematischen Zahlendarstellungen, Zahlenmengen und Grundrechenarten wiederholt und vertieft.

Alle notwendigen Informationen und Arbeitsunterlagen sind in diesem Lernmodul enthalten.

Dieses Lernmodul ist im häuslichen Studium zu erarbeiten.

Der benötigte Zeitaufwand liegt bei ca. 20 Stunden.

Zusätzlich finden in den semesterbezogenen Präsenzphasen 7 Stunden Festigung und Vertiefung fachspezifischer und fächerübergreifender Zusammenhänge sowie die Beschreibung typischer Aufgaben und Problemstellungen statt.

LERNMODUL 1

Ziele

Ausgangssituation

Planung

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Zahlendarstellungen	3
1.1 Zeichen und Abkürzungen	3
1.2 Runden von Zahlen.....	4
1.3 Zehnerpotenzen	7
1.4 Zweiersystem	10
2 Zahlenmengen	14
2.1 Natürliche Zahlen	15
2.2 Ganze Zahlen	16
2.3 Rationale Zahlen	17
2.4 Reelle Zahlen	22
2.5 Komplexe Zahlen	30
3 Grundrechenarten	36
3.1 Addition und Subtraktion.....	36
3.2 Multiplikation und Division.....	45
3.3 Klammerrechnen und Faktorisieren.....	51
3.4 Binomische Formeln	65
3.5 Polynomdivision	70
Lösungsanhang	75

1 Mathematische Zahlendarstellungen

Lernbereich

1.1 Zeichen und Abkürzungen

In der modernen Industrie- und Kommunikationsgesellschaft haben immer mehr Menschen mit mathematisch bestimmten oder beeinflussten Problemen zu tun. Die Bedeutung der Mathematik für die Gesellschaft und hier vor allem für Führungskräfte im technischen, kaufmännischen und informationstechnologischen Bereich sind offenkundig.

Im Laufe der Geschichte hat sich die Mathematik von ihrer „Anwendbarkeit“ zu einem abstrakten, nur von den Gesetzen der Logik bestimmten System mit einer eigenen „Sprache“ und „Grammatik“ entwickelt.

An dieser Stelle wird eine Übersicht über die wichtigsten **Zeichen und Abkürzungen** gegeben, um die Möglichkeit zu bieten, bei Bedarf nachzuschlagen und um „Sprache“ und „Grammatik“ der Mathematik verstehen zu können.

Mengen

$M = \{5, 6, 7, 8\}$	Menge aus den Elementen 5, 6, 7, 8 in aufzählender Form
L	Lösungsmenge für eine Gleichung bzw. Ungleichung
$\{\}$	leere Menge
G	Grundmenge
W	Wertemenge
$M = \{x \in \mathbb{Q} \mid 5 \leq x \leq 8\}$	Menge in beschreibender Form
D	Definitionsmenge

Beziehungen zwischen Zahlen

$a = b$	a gleich b
$x \neq y$	x ungleich y
\approx	nahezu gleich
$c > d$	c größer als d
$e < f$	e kleiner als f
$a \leq b$	a kleiner oder gleich b

Verknüpfungen von Zahlen

$a + b$	Summe (a plus b)
$x - y$	Differenz (x minus y)
$a \cdot b$	Produkt (a mal b)

$x : y$	Quotient (x geteilt durch y)
a^b	Potenz (a hoch b)
$ x $	Betrag der Zahl x
\sqrt{a}	Quadratwurzel aus a , $a \geq 0$
$\sqrt[n]{a}$	n-te Wurzel aus a , $a \geq 0$
Geometrie	
A, B, C ...	Punkte
\overline{CD}	Strecke mit den Endpunkten C und D
g, h, k	Geraden
$g \parallel h$	g ist parallel zu h
$g \perp h$	g ist senkrecht zu h
P (5 10)	Punkt im Koordinatensystem mit den Koordinaten 5 (x-Wert) und 10 (y-Wert)
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}$	Vektoren
$\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon \rho \varphi$	alpha, beta, gamma, delta, epsilon, rho, phi
(PSQ)	Winkelbezeichnungen
(a, b)	
$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$	$\triangle ABC$ ist kongruent zu $\triangle A'B'C'$

1.2 Runden von Zahlen

Bei Schätzungen, Vergleichen oder Überschlagsrechnungen sind häufig nur genäherte Zahlenangaben von Bedeutung. So ist z.B. bei der Angabe der Einwohnerzahl einer Stadt mit 25835 die Angabe: ≈ 26000 genau genug.

Auch Berechnungen bei technischen Sachverhalten können zu Ergebnissen führen, die sich jeder Messmöglichkeit entziehen. Soll eine Strecke von 12 cm Länge in 7 gleiche Teile aufgeteilt werden, ergibt sich:

$$12 \text{ cm} : 7 = 1,714\,285 \text{ cm}$$

An den beiden Beispielen ist deutlich geworden, dass das Runden von Zahlen nicht Selbstzweck ist, sondern praktischen Überlegungen folgt. Diese praktischen Erfordernisse entscheiden auch darüber, auf wie viele Stellen gerundet werden soll. Hier gilt die Regel: **Zahlen sollten so genau wie nötig angegeben werden.**

Regeln für das Runden von Zahlen auf n Dezimalstellen

Steht an der (n + 1)-ten Stelle eine der **Ziffern 0, 1, 2, 3 oder 4**, wird die n-te Stelle **abgerundet**, d.h. sie bleibt unverändert.

Beispiele: $9,81 \approx 9,8$ $22,743 \approx 22,74$

Steht an der (n + 1)-ten Stelle eine der **Ziffern 5, 6, 7, 8 oder 9**, wird die n-te Stelle **aufgerundet**.

Beispiele: $9,86 \approx 9,9$ $22,747 \approx 22,75$

Ist eine 5 durch Aufrunden entstanden, so wird im nächsten Schritt abgerundet.

Beispiel: $0,145 \approx 0,15 \approx 0,1$

Lehrbeispiel 1

Runden Sie jeweils auf die angegebene Rundungsstelle!

8763 (6), 13955 (3), 12,67501 (7), 0,075 (7), 8,65 (6)

Lösung

8763 (6) Die auf die 6 folgende Ziffer ist die 3: **abrunden** $8763 \approx 8760$

13955 (3) Die auf die 3 folgende Ziffer ist die 9: **aufrunden** $13955 \approx 14000$

12,67501 (7) Die auf die 7 folgende Ziffer ist die 5: **aufrunden** $12,67501 \approx 12,68$

0,075 (7) Die auf die 7 folgende Ziffer ist die 5: **aufrunden** $0,075 \approx 0,08$

8,65 (6) Die auf die 6 folgende Ziffer ist die 5: **aufrunden** $8,65 \approx 8,7$

Da jedes Messgerät (Thermometer, Zollstock, Stoppuhr usw.) Messwerte von begrenzter Genauigkeit liefert, ist jedes Messergebnis ein Näherungswert des exakten Messwertes.

Lehrbeispiel 2

Addieren Sie die Näherungswerte!

$8,4123 + 9,7 + 4,505$

Lösung

Runden Sie alle Näherungswerte auf so viele Nachkommastellen, wie der ungenaueste Wert (9,7) hat.

$$8,4123 \approx 8,4 \quad 4,505 \approx 4,5$$

Addieren Sie die gerundeten Werte. $8,4 + 9,7 + 4,5 = \underline{22,6}$

Lehrbeispiel 3

Subtrahieren Sie die Näherungswerte!

$$10,958 - 3,27 - 5,791$$

Lösung

Der ungenaueste Wert (3,27) hat zwei Nachkommastellen.

$$10,958 \approx 10,96$$
$$5,791 \approx 5,79$$

Antwort: $10,96 - 3,27 - 5,79 = \underline{1,9}$

Lehrbeispiel 4

Multiplizieren Sie!

$$2,56 \cdot 0,83$$

Lösung

Der ungenaueste Faktor (0,83) enthält **zwei gültige Ziffern**. Deshalb wird auch der Faktor 2,56 auf zwei gültige Ziffern gerundet.

$$2,56 \approx 2,6$$

Die Multiplikation lautet dann: $2,6 \cdot 0,83 = 2,158$

Das Ergebnis wird nun ebenfalls auf zwei gültige Ziffern gerundet: $2,158 \approx 2,2$

Antwort: $2,56 \cdot 0,83 \approx \underline{2,2}$

Lehrbeispiel 5

Dividieren Sie!

$$39,74 : 5,3$$

Lösung

Die ungenauere Zahl enthält zwei gültige Ziffern (5,3). Daher wird auch die zweite Zahl auf zwei gültige Ziffern gerundet: $39,74 \approx 40$

Die Division lautet dann: $40 : 5,3 = 400 : 53 = 7,54\dots$

Das Ergebnis wird auf zwei gültige Ziffern gerundet: $7,54\dots \approx 7,5$

Antwort: $39,74 : 5,3 \approx \underline{7,5}$

1.3 Zehnerpotenzen

In den Naturwissenschaften und der Technik wird häufig mit sehr großen Zahlen gearbeitet.

Lehrbeispiel 1

Ein Lichtjahr entspricht der Entfernung, die das Licht in einem Jahr zurücklegt. Licht breitet sich mit der Geschwindigkeit von etwa 300 000 km/s aus.

Berechnen Sie die Entfernung von einem Lichtjahr (Lj) in Kilometern!

Lösung

1 Jahr = 365 Tage
1 Tag = 24 Stunden
1 Stunde = 3600 Sekunden

1 Lj = $365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} \cdot 300\,000 \text{ km/s}$

Antwort: Ein Lichtjahr entspricht einer **Entfernung** von etwa **9 460 800 000 000 km**.

Dieses Ergebnis ist recht unübersichtlich und nur sehr mühsam zu lesen. Daher hat man in den Naturwissenschaften eine Möglichkeit gesucht, solch große Zahlen übersichtlicher zu schreiben. Dabei hat man den **Aufbau unseres Zahlensystems zur Grundlage** gemacht. Unser Zahlensystem gehört zu den **Stellenwertsystemen**; es beruht auf der Grundzahl 10. Daher wird es **Zehner- oder Dezimalsystem** genannt. Die **1, 10, 100, 1000, ...** nennt man die **Stufenzahlen des Zehnersystems**.

Die Stufenzahlen unterscheiden sich demnach nur durch die Anzahl der Nullen, die an die Ziffer 1 angehängt werden.

Diese Eigenschaft der Stufenzahlen hat man zur Grundlage einer verkürzten Schreibweise gemacht.

Die **Stufenzahl 10** wird zur **Grundzahl (Basis)**, die **Anzahl der Nullen** wird zur **Hochzahl (dem Exponenten)** einer **Potenz (Zehnerpotenz)**.

1	=	10^0	Eins	(keine Null hinter der Ziffer 1)
10	=	10^1	Zehn	(eine Null hinter der Ziffer 1)
100	=	10^2	Hundert	Vorsilbe: Hekto; Kurzform: h
1 000	=	10^3	Tausend	Vorsilbe: Kilo; Kurzform: k
10 000	=	10^4	Zehntausend	
100 000	=	10^5	Hunderttausend	
1 000 000	=	10^6	Million	Vorsilbe: Mega; Kurzform: M
1 000 000 000	=	10^9	Milliarde	Vorsilbe: Giga; Kurzform: G
1 000 000 000 000	=	10^{12}	Billion	Vorsilbe: Tera; Kurzform: T
		10^{15}	Billiarde	
		10^{18}	Trillion	
		10^{21}	Trilliarde	
		10^{24}	Quadrillion	
		10^{27}	Quadrilliarde	

Eine Zahl lässt sich so in zwei Faktoren zerlegen, dass der Wert des 1. Faktors zwischen 1 und 10 liegt und der 2. Faktor eine Zehnerpotenz ist.

$$3\,000\,000 = 3 \cdot 1\,000\,000$$

$$= 3 \cdot 10^6$$

$$5\,185\,000 = 5,185 \cdot 1\,000\,000$$

$$= 5,185 \cdot 10^6$$

Lehrbeispiel 2

Schreiben Sie mithilfe von Zehnerpotenzen!

1 230 000, 232 400, 9 184 530

Lösung

$$1\,230\,000 =$$

Der **1. Faktor (zwischen 1 und 10)** enthält alle von Null verschiedenen Ziffern: 1,23

Der **2. Faktor (Zehnerpotenz)** ergibt sich aus der Anzahl der Stellen, die insgesamt abgestrichen worden sind: 10^6 .

Antwort: $1\,230\,000 = \underline{1,23} \cdot 10^6$

$$232\,400 = \underline{2,324} \cdot 10^5 \text{ (5 Stellen von rechts abgestrichen)}$$

$$9\,184\,530 = \underline{9,18453} \cdot 10^6$$

Zur Darstellung kleinster Längen werden neben der Einheit Millimeter noch kleinere Einheiten verwendet. So werden z.B. die Längen von Lichtwellen häufig in Mikrometern (μm) angegeben ($1\,\mu\text{m} = 0,000\,001\,\text{m}$).

Um auch kleine Zahlen mithilfe von Zehnerpotenzen darstellen zu können, hat man das vorgestellte System erweitert.

$0,1 = 1/10$	$= 10^{-1}$	Zehntel (eine Null wird angehängt, allerdings im Nenner) Vorsilbe: dezi; Abkürzung: d
$0,01 = 1/100$	$= 10^{-2}$	Hundertstel (zwei Nullen werden angehängt) Vorsilbe: Zenti; Abkürzung: c
$0,001 = 1/1\,000$	$= 10^{-3}$	Tausendstel Vorsilbe: Milli; Abkürzung: m
$0,000\,001 = 1/1\,000\,000$	$= 10^{-6}$	Millionstel Vorsilbe: Mikro; Abkürzung: μ
$0,000\,000\,001 = 1/1\,000\,000\,000$	$= 10^{-9}$	Milliardstel Vorsilbe: Nano; Abkürzung: n
$0,000\,000\,000\,001 = 1/1\,000\,000\,000\,000$	$= 10^{-12}$	Billionstel Vorsilbe: Piko; Abkürzung: p

Lehrbeispiel 3

Schreiben Sie mithilfe von Zehnerpotenzen!

0,004; 0,0014; 0,000 000 76

Lösung

0,004 =

Der 1. Faktor (zwischen 1 und 10) enthält alle von Null verschiedenen Ziffern: **4**

Der 2. Faktor (Zehnerpotenz) ergibt sich aus der Anzahl der Stellen, die vom Komma aus bis hinter die erste Ziffer des 1. Faktors gezählt wird: **10^{-3}**

Antwort: $0,004 = 4 \cdot 10^{-3}$

$0,001\,4 = 1,4 \cdot 10^{-3}$

$0,000\,000\,76 = 7,6 \cdot 10^{-7}$

1.4 Zweiersystem

Wie bereits gezeigt wurde, ist die Stufenzahl 10 Grundlage unseres Zahlensystems. Dafür gibt es vor allem historische Gründe (10 Finger zum Zählen). Grundsätzlich kann jede beliebige Zahl als Stufenzahl dienen (Ausnahme: 1).

Im **Zweiersystem**, auch **Dualsystem** genannt, wird die Zahl 2 Stufenzahl; somit werden die Potenzen zur Basis 2 die Einheiten dieses Stellenwertsystems, mit dessen Hilfe sich jede natürliche Zahl eindeutig darstellen lässt.

Da sich die **Dualzahlen** leicht durch den Zustand einer elektrischen Schaltung (Schalter geschlossen/offen) darstellen lassen, werden sie in der elektronischen Datenverarbeitung verwendet. Man spricht von **Binärzahlen**. Es können also nur die Ziffern 0 und 1 auftreten.

Lehrbeispiel 1

Schreiben Sie die Zahl 125 im Zweiersystem!

Lösung

Stufenzahlen

2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

Zunächst wird ein Stellenwertsystem mit den Zweierpotenzen und den zugehörigen Zahlen des Dezimalsystems aufgestellt.

Der **1. Lösungsschritt** besteht darin, die größte in der Dezimalzahl enthaltene Zweierpotenz zu finden. Anschließend wird für alle Zweierpotenzen niederen Grades (bis 2^0) geprüft, ob sie im jeweiligen Rest einmal (1) oder Null mal (0) enthalten sind.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 125 & = & 1 \cdot 2^6 & + & 1 \cdot 2^5 & + & 1 \cdot 2^4 & + & 1 \cdot 2^3 & + & 1 \cdot 2^2 & + & 0 \cdot 2^1 & + & 1 \cdot 2^0 \\
 & & 64 & + & 32 & + & 16 & + & 8 & + & 4 & + & 0 & + & 1 \\
 & & \text{Rest } 61 & & \text{Rest } 29 & & \text{Rest } 13 & & \text{Rest } 5 & & \text{Rest } 1 & & & &
 \end{array}$$

Zur Kennzeichnung der Dualzahl verwendet man häufig den Index 2, bei den Dezimalzahlen wird der Index in der Regel weggelassen.

Antwort: $125 = \underline{(1111101)}_2$

Lehrbeispiel 2

Übersetzen Sie die Dualzahl in die dezimale Schreibweise!

$$(1\ 0\ 0\ 1\ 0)_2$$

Lösung

$$\begin{aligned}
 (10010)_2 &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\
 &= 16 + 0 + 0 + 2 + 0 \\
 &= 18
 \end{aligned}$$

Das schriftliche Rechnen im Zweiersystem wird nach den gleichen Verfahren durchgeführt wie das Rechnen mit Dezimalzahlen.

Lehrbeispiel 3

Addieren Sie die Dualzahlen 10101 und 110!

Lösung

Wie im Zehnersystem werden auch hier im Zweiersystem die entsprechenden Potenzen jeweils addiert.

Dualzahlen	Stufenzahlen (2^n)	Dezimalsystem
10101	$1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	21
+ 110	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	+ 6
<u>11011</u>	$1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	<u>27</u>

Lehrbeispiel 4

Multiplizieren Sie die Dualzahlen 11 und 101!

Lösung

Im Zweiersystem besteht das „Einmaleins“ nur aus vier Möglichkeiten (im Gegensatz zum Zehnersystem: 100 Möglichkeiten):

$$0 \cdot 0 = 0 \quad 0 \cdot 1 = 0 \quad 1 \cdot 0 = 0 \quad 1 \cdot 1 = 1$$

$$\begin{array}{r}
 11 \cdot 101 \\
 \hline
 11 \\
 00 \\
 11 \\
 \hline
 1111
 \end{array}
 \quad
 (1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) (1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)
 \quad
 3 \cdot 5 = 15$$

AufgabenAufgabe 1

Runden Sie folgende Dezimalzahlen auf die jeweils angegebene Stelle!

- 1.1 3,1505 (2. Stelle nach dem Komma)
- 1.2 19,67 (1. Stelle nach dem Komma)
- 1.3 1250,0 (3. Stelle vor dem Komma)
- 1.4 875,5 (2. Stelle vor dem Komma)

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Summe bzw. Differenz der genäherten Zahlenwerte!

- 2.1 $8,5441 + 25,489 + 0,75$
- 2.2 $33,567 - 9,8$

Aufgabe 3

Berechnen Sie jeweils das Produkt bzw. den Quotienten der genäherten Zahlenwerte!

- 3.1 $47,93 \cdot 3,5$
- 3.2 $65,2 : 0,38$

Aufgabe 4

Schreiben Sie folgende Zahlen mithilfe von Zehnerpotenzen!

- 4.1 5 000 000
- 4.2 1 230 000 000
- 4.3 9 184 530

Aufgabe 5

Geben Sie die Größe in der angegebenen Einheit mithilfe von Zehnerpotenzen an!

- 5.1 250 kW (W)
- 5.2 7 GW (W)
- 5.3 800 km (m)

Aufgabe 6

Schreiben Sie mithilfe von Zehnerpotenzen!

- 6.1 Die Erdoberfläche hat eine Größe von 510 Billionen Quadratmetern.
- 6.2 Das Volumen der Erde beträgt 1083 Trillionen Kubikmeter.

Aufgabe 7

Schreiben Sie mithilfe von Zehnerpotenzen!

- 7.1 0,000 7
- 7.2 0,000 000 72
- 7.3 0,000 001

Aufgabe 8

Geben Sie die Größe in der angegebenen Einheit mithilfe von Zehnerpotenzen an!

- 8.1 12 μm (m)
- 8.2 1280 nm (m)
- 8.3 500 pF (F)

Aufgabe 9

Schreiben Sie mithilfe von Zehnerpotenzen in Metern!

- 9.1 Der Durchmesser eines Glühlampenfadens beträgt 8 μm .
- 9.2 Harte Röntgenstrahlen haben eine Wellenlänge von 250 nm.

Aufgabe 10

Schreiben Sie die Dezimalzahlen im Zweiersystem!

- 10.1 88
- 10.2 429
- 10.3 901

Aufgabe 11

Addieren Sie die Dualzahlen und überprüfen Sie im Dezimalsystem!

- 11.1 $10010 + 10101$
- 11.2 $1111111 + 1100$

Aufgabe 12

Multiplizieren Sie die Dualzahlen und überprüfen Sie im Dezimalsystem!

- 12.1 $10 \cdot 100$
- 12.2 $100101 \cdot 11001$

Lernbereich

2 Zahlenmengen

Die **Grundbegriffe der Mengenlehre sind Menge und Element**. Eine Menge ist eine Zusammenfassung von genau bestimmten, unterschiedlichen Dingen. Die Dinge, welche die Menge bilden, heißen ihre Elemente. Als Bezeichnung für Mengen werden die großen Buchstaben A, B, C, ... , für die Elemente die kleinen Buchstaben a, b, c, ... verwendet.

Gehört das Element a zur Menge A , so schreibt man $a \in A$ (lies: a ist Element von A). Gehört das Element a nicht zur Menge B, so schreibt man $a \notin B$ (lies: a ist nicht Element von B).

Die Darstellung einer Menge kann auf drei Arten erfolgen:

1. **Aufzählende Form:** Die Elemente der Menge werden zwischen den Mengenklammern (geschweifte Klammern) aufgezählt und durch Semikolon oder Komma voneinander getrennt.

Lehrbeispiel 1

Geben Sie die Menge V der Vokale des Alphabets in aufzählender Form an!

Lösung

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

2. **Beschreibende Form:** Die Elemente werden durch ihre gemeinsamen Eigenschaften charakterisiert. Die charakteristische Eigenschaft wird durch eine **Aussageform** und eine **Grundmenge G** festgelegt, aus der die Elemente der beschriebenen Menge genommen werden dürfen.

Lehrbeispiel 2

Geben Sie die Menge M der Buchstaben des Alphabets an, die vor dem Buchstaben e stehen!

Lösung

$$M = \{\Delta \mid \Delta \text{ steht vor e}\}$$

Lies: M ist die Menge aller Buchstaben, für die gilt: steht vor e.

Um aus der beschreibenden Form einer Menge die aufzählende Form zu erhalten, wird jedes Element der Grundmenge an die Stelle der Variablen (Platzhalter) gesetzt; dabei muss eine wahre Aussage entstehen.

Antwort: $M = \{a, b, c, d\}$

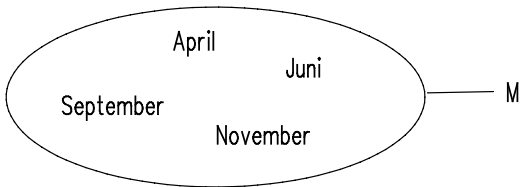
Die aufzählende Form einer Menge wird vorwiegend für Mengen mit endlich vielen Elementen benutzt. Wird es für unendliche Mengen (Zahlenmengen) verwendet, so werden einige Elemente aufgeschrieben und die nachfolgenden durch drei Punkte angedeutet.

3. **Mengenbild oder Venn-Diagramm:** Hierbei werden die Elemente einer Menge bildlich innerhalb einer geschlossenen Linie in der Ebene dargestellt.

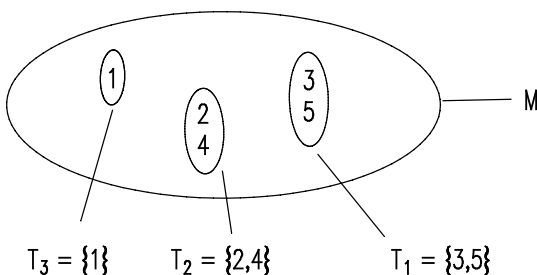
Lehrbeispiel 3

Zeichnen Sie das Venn-Diagramm der Menge $M = \{m | m \text{ hat } 30 \text{ Tage}\}$!

Grundmenge $G = \text{Monate des Jahres}$

LösungLehrbeispiel 4

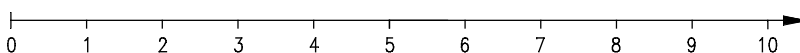
Das Mengenbild zeigt die Menge $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Geben Sie drei Teilmengen (T_1 , T_2 , T_3) von M an!

Lösung

Wenn nur einige Elemente der Menge M betrachtet werden sollen, bildet man **Teilmengen T** . Dafür gilt die Regel, dass jedes Element der Teilmenge auch Element der Menge ist: $T \subset M$. Lies: Die Menge T ist Teilmenge der Menge M .

2.1 Natürliche Zahlen

Beim Zählen verwendet man **natürliche Zahlen**. Die natürlichen Zahlen werden anschaulich auf einer **Zahlenhalbgeraden, dem Zahlenstrahl**, dargestellt.



Die Menge der natürlichen Zahlen hat unendlich viele Elemente. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Als \mathbb{N}^* wird die Menge der natürlichen Zahlen **ohne** die Null bezeichnet. $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

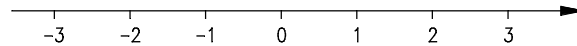
Auf dem Zahlenstrahl liegt die kleinere Zahl links von der größeren Zahl.

4 steht links von 10 7 steht rechts von 5
4 ist kleiner als 10 7 ist größer als 5

$4 < 10$ $7 > 5$

2.2 Ganze Zahlen

In der Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} ist die Subtraktion zweier Zahlen a, b nur dann möglich, wenn $a > b$. Die Differenz $a - b$ für $a < b$ ist in \mathbb{N} nicht möglich. Aus diesem Grund verlängert man die Zahlenhalbgerade nach links über die Null hinaus zur **Zahlengeraden**.



Zahlen wie $+1$; $+87$; $+354$ sind **positive ganze Zahlen**.

Zahlen wie -3 ; -67 ; -197 sind **negative ganze Zahlen**.

Die negativen ganzen Zahlen, die Null und die positiven ganzen Zahlen bilden die Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} .

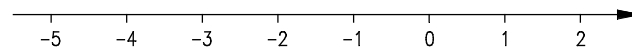
$$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Lehrbeispiel 1

Vergleichen Sie die ganzen Zahlen jeweils miteinander!

-5 und -3 ; $+1$ und -1

Lösung



Antwort: $-5 < -3$; $+1 > -1$

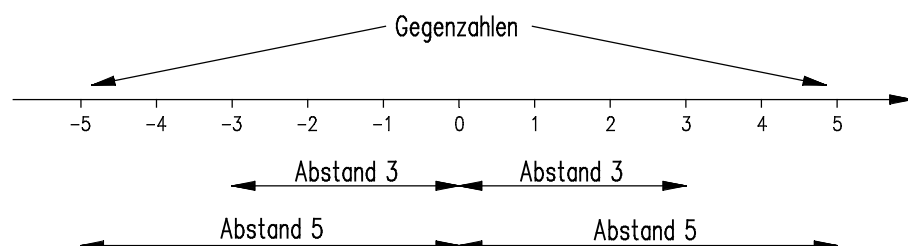
Auf der Zahlengeraden liegt von zwei ganzen Zahlen die kleinere Zahl links und die größere Zahl rechts.

Lehrbeispiel 2

Geben Sie jeweils die Zahl an, die denselben Abstand von der Null hat wie die angegebene Zahl!

-5 ; $+3$

Lösung



Der **Abstand einer Zahl von der Null heißt Betrag**.

$$|-5| = 5$$

$$|+3| = 3$$

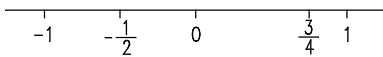
Lies: Betrag von -5 ist 5

Betrag von $+3$ ist 3

Zwei Zahlen mit dem **gleichen Abstand von der Null** heißen **Gegenzahlen**.

2.3 Rationale Zahlen

Zwischen zwei ganzen Zahlen lassen sich beliebig viele andere Zahlen abtragen. Auf diese Weise erhält man Bruchteile des Zahlenbereiches der ganzen Zahlen \mathbb{Z} . Diese neuen Zahlen werden **Brüche** oder **Bruchzahlen** genannt.



Brüche, die sich als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellen lassen, werden **rationale Zahlen** genannt. Sie werden in der Menge \mathbb{Q} zusammengefasst.

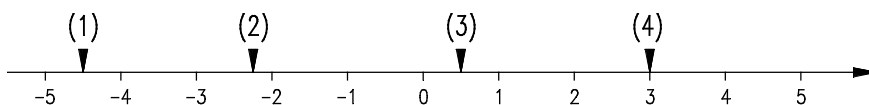
Zahlen wie $+2,5$; $+1/3$; $7,65$ sind **positive rationale Zahlen**.

Zahlen wie $-4,7$; $-4/9$; -1 sind **negative rationale Zahlen**.

Die positiven rationalen Zahlen einschließlich der Null bilden die Menge \mathbb{Q}_+ . Die negativen rationalen Zahlen einschließlich der Null bilden die Menge \mathbb{Q}_- .

Lehrbeispiel 1

Bestimmen Sie jeweils die markierten rationalen Zahlen!



Lösung

(1) $-4,5$; (2) $-2,25$; (3) $+0,5$; (4) $+3$

Auf der Zahlengeraden lassen sich die rationalen Zahlen darstellen.

Jede ganze Zahl lässt sich auch als Bruchzahl schreiben.

$$2 = 6/3 = 8/4$$

$$-1 = -2/2 = -5/5$$

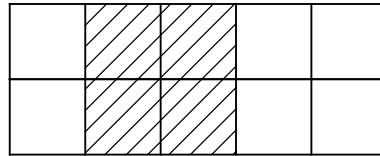
Jede Bruchzahl, die sich nicht als ganze Zahl schreiben lässt, kann als gemischte Zahl geschrieben werden.

$$12/5 = 2 \frac{2}{5}$$

$$-14/3 = -4 \frac{2}{3}$$

Lehrbeispiel 2

Geben Sie zwei Bruchzahlen für den schraffierten Bruchteil an!



Lösung

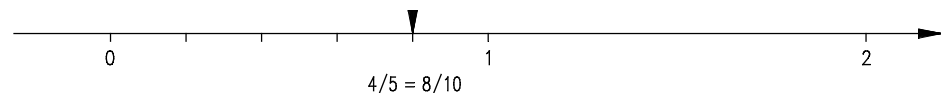
2 Streifen von 5 Streifen: $2/5$

4 Streifen von 10 Streifen: $4/10$

$$2/5 = 4/10$$

Antwort: Die beiden Brüche $2/5$ und $4/10$ bezeichnen den gleichen schraffierten Bruchteil.

Brüche, die auf der Zahlengerade an der gleichen Stelle liegen, bezeichnen dieselbe Bruchzahl.



Lehrbeispiel 3

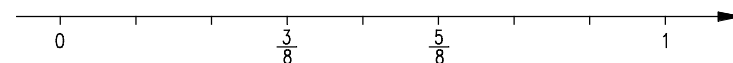
Vergleichen Sie jeweils die beiden Bruchzahlen miteinander. Verwenden Sie dafür die Zeichen $<$ oder $>$!

$3/8$ und $5/8$, $2/3$ und $3/5$, $18/30$ und $36/40$!

Lösung

Vergleich von $3/8$ und $5/8$

Beim Vergleich zweier Brüche, die den gleichen Nenner haben, entscheiden die beiden Zähler darüber, welche Bruchzahl die größere bzw. kleinere ist.



Antwort: $3/8 < 5/8$

Vergleich von $2/3$ und $3/5$ sowie $18/30$ und $36/40$

Zum Vergleichen von Bruchzahlen mit verschiedenen Nennern müssen die Brüche zunächst auf den gleichen Nenner gebracht werden. Dies kann entweder durch **Kürzen oder Erweitern** des Bruches erreicht werden. Sie werden **gleichnamig** gemacht. Der **kleinste gemeinsame Nenner ist der Hauptnenner**. Dieser Hauptnenner muss

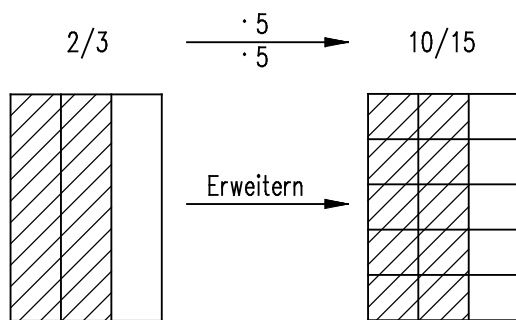
beide Nenner als Vielfaches enthalten, somit ist er das **kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)**.

Man bildet zunächst die Vielfachmengen beider Nenner:

$$V_3 = \{ 3, 6, 9, 12, \boxed{15}, 18, \dots \} \quad V_5 = \{ 5, 10, \boxed{15}, 20, \dots \}$$

Die Zahl 15 ist in beiden Vielfachmengen die kleinste Zahl und somit das gesuchte kgV.

Nun müssen beide Brüche auf diesen gemeinsamen Hauptnenner gebracht werden. Dieses geschieht durch Erweitern. Dabei darf sich der Wert des Bruches nicht verändern.



Ein Bruch wird erweitert, indem Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert werden.

$$\frac{3}{5} \xrightarrow[\cdot 3]{\cdot 3} \frac{9}{15}$$

Antwort: $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$

$$\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$$

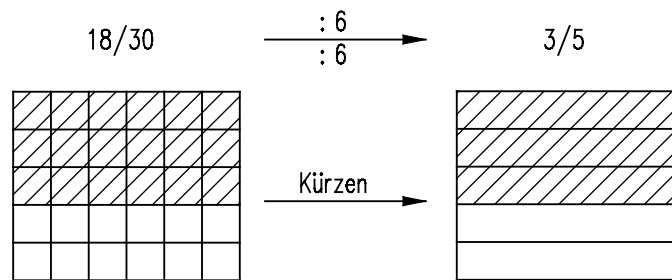
Vergleich von $\frac{18}{30}$ und $\frac{36}{40}$

Bevor von diesen beiden Nennern das kgV bestimmt wird, werden die Brüche zunächst **gekürzt**.

Dafür bestimmt man jeweils von Zähler und Nenner die Teilmengen, um so den **größten gemeinsamen Teiler** bestimmen zu können.

$$T_{18} = \{ 1, 2, 3, \boxed{6}, 9, 18 \} \quad T_{30} = \{ 1, 2, 3, 5, \boxed{6}, 10, 15, 30 \}$$

Die Zahl 6 ist in beiden Teilmengen die größte Zahl und somit der gesuchte ggT. Nun muss der Bruch $\frac{18}{30}$ gekürzt werden.



Ein Bruch wird gekürzt, indem Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividiert werden.

$$36/40 \xrightarrow{\begin{smallmatrix} : 4 \\ : 4 \end{smallmatrix}} 9/10$$

Nun werden die Brüche wie schon beschrieben auf den gemeinsamen Nenner erweitert.

Antwort: $\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$ $9/10$

$$6/10 < 9/10$$

In vielen Fällen - wenn die Zahlen im Zähler und Nenner sehr groß werden - ist es vorteilhaft, kgV und ggT mithilfe eines formalisierten Verfahrens zu bestimmen. Für dieses Verfahren werden die **Primzahlen** verwendet.

Natürliche Zahlen, die genau zwei Teiler haben, nennt man Primzahlen. Sie sind nur durch 1 und sich selbst teilbar. Dabei ist 1 keine Primzahl.

Die Primzahlen bis 50:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

Lehrbeispiel 4

Vergleichen Sie die Brüche $35/42$; $55/70$ und $75/105$ miteinander!

Lösung

Zunächst werden in tabellarischer Form die Nenner in Primfaktoren zerlegt. Dabei werden nur gleiche Faktoren untereinander geschrieben.

$$\begin{array}{rcll} 42 & = & 2 & \cdot 3 & \cdot 7 \\ 70 & = & 2 & \cdot 5 & \cdot 7 \\ 105 & = & 3 & \cdot 5 & \cdot 7 \\ \text{kgV (42, 70, 105)} & = & 2 & \cdot 3 & \cdot 5 & \cdot 7 \\ & = & 210 \end{array}$$

Das kgV muss nun **alle Primfaktoren** enthalten, die jeweils in einem Nenner enthalten sind. Nun müssen die Brüche auf den Hauptnenner erweitert werden.

$$\frac{35 \cdot 5}{42 \cdot 5} = \frac{175}{210} \quad \frac{55 \cdot 3}{70 \cdot 3} = \frac{165}{210} \quad \frac{75 \cdot 2}{105 \cdot 2} = \frac{150}{210}$$

Antwort: $\frac{175}{210} > \frac{165}{210} > \frac{150}{210}$

Lehrbeispiel 5

Kürzen Sie folgenden Bruch: 112/184!

Lösung

Zähler und Nenner werden - analog zum kgV - in Primfaktoren zerlegt.

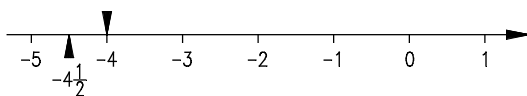
$$\begin{aligned} 112 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \\ 184 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23 \\ \text{ggT}(112, 184) &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Der ggT enthält **alle gemeinsamen Primfaktoren**.

Antwort: $\frac{112 : 8}{184 : 8} = \frac{14}{23} \quad \frac{112}{184} = \frac{14}{23}$

Lehrbeispiel 6

Entscheiden Sie, welche der beiden rationalen Zahlen $-4 \frac{1}{2}$ und -4 kleiner bzw. größer ist!



Antwort: $-4 \frac{1}{2} < -4$

Auf der Zahlengeraden liegt von zwei rationalen Zahlen die kleinere Zahl links und die größere Zahl rechts.

Lehrbeispiel 7

Schreiben Sie die Brüche $2/9$ und $15/22$ als Dezimalbrüche!

Lösung

Ein Bruch wird in einen Dezimalbruch umgeformt, indem der Zähler durch den Nenner dividiert wird.

$$\begin{aligned} 2/9 &= 2 : 9 = 0,2222... \\ &= 0,\overline{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15/22 &= 15 : 22 = 0,681818... \\ &= 0,6\overline{81} \end{aligned}$$

Lies: Null Komma Periode 2

Null Komma sechs acht Periode eins acht

Nicht abbrechende Dezimalbrüche werden **reinperiodisch** genannt, wenn **alle Ziffern** nach dem Komma zur Periode gehören.

$$5/11 = 5 : 11 = 0,\overline{45}$$

Nicht abbrechende Dezimalbrüche werden **gemischt-periodisch** genannt, wenn hinter dem Komma auch Ziffern vorkommen, die nicht zur Periode gehören.

$$17/30 = 17 : 30 = 0,5\overline{6}$$

Lehrbeispiel 8

Verwandeln Sie den Dezimalbruch $0,\overline{62}$ in einen Bruch!

Lösung

$$0,\overline{62} = 62/99$$

Die Ziffern der Periode werden in den Zähler geschrieben. Im Nenner müssen so viele Neunen geschrieben werden, wie die Periode Ziffern hat.

Lehrbeispiel 9

Verwandeln Sie den Dezimalbruch $0,3\overline{6}$ in einen Bruch!

Lösung

$$\begin{aligned} 0,3\overline{6} &= 3,\overline{6} \cdot 1/10 \\ &= 3\ 6/9 \cdot 1/10 \\ &= 33/9 \cdot 1/10 = 33/90 = 11/30 \end{aligned}$$

Das Komma wird so weit nach rechts verschoben, bis die Periode hinter dem Komma beginnt. Damit diese Multiplikation ausgeglichen wird, muss mit einem Zehntelbruch (Hundertstelbruch ...) multipliziert werden.

2.4 Reelle Zahlen

Lehrbeispiel 1

Bilden Sie jeweils die Quadrate der folgenden Zahlen!

$$8^2, (-1,5)^2, (2/5)^2, 0^2$$

Lösung

$$\begin{aligned} 8^2 &= 8 \cdot 8 \quad \text{Lies: 8 hoch 2} \\ &= 64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1,5)^2 &= (-1,5) \cdot (-1,5) \\ &= 2,25 \end{aligned}$$

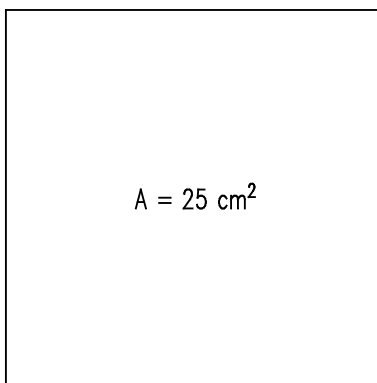
$$\begin{aligned}(2/5)^2 &= 2/5 \cdot 2/5 \\ &= 4/25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0^2 &= 0 \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Wenn eine Zahl mit sich selbst multipliziert wird, so erhält man das Quadrat der Zahl.

Das Quadrat einer Zahl ist immer größer oder gleich Null.

Soll aus dem gegebenen Flächeninhalt A des abgebildeten Quadrates die Seitenlänge a berechnet werden, wird eine Zahl gesucht, die mit sich selbst multipliziert 25 ergibt, da gilt:



$$\begin{aligned}A &= a \cdot a \\ &= a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= 25 \text{ cm}^2 \\ &= 5 \text{ cm}^2 \cdot 5\end{aligned}$$

$$a = 5 \text{ cm}$$

Abbildung 1 Quadrat

Zur Bestimmung dieser gesuchten Zahl hat man eine neue Schreibweise eingeführt:

$$\sqrt{25} = 5, \text{ denn } 5^2 = 25$$

Lies: Wurzel aus 25 gleich 5

Lehrbeispiel 2

Nennen Sie eine rationale Zahl, deren Quadrat –81 ist!

Lösung

Es gibt zwei Möglichkeiten einer Lösung.

1. $(-9) \cdot (-9) = +81$
2. $(+9) \cdot (+9) = +81$

Antwort: Es existiert keine rationale Zahl, deren Quadrat –81 ist.

\sqrt{a} ist die nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ist. Sie heißt Quadratwurzel aus a. Man nennt die Zahl unter dem Wurzelzeichen Radikand.

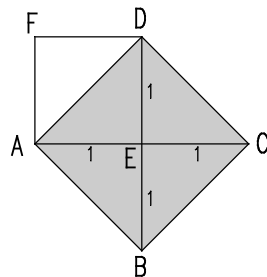
$$\sqrt{49} = 7, \text{ denn } 7^2 = 49$$

$$\sqrt{0,25} = 0,5, \text{ denn } 0,5^2 = 0,25$$

$$\sqrt{0} = 0, \text{ denn } 0^2 = 0$$

Lehrbeispiel 3

Geben Sie zunächst den Flächeninhalt des Quadrates ABCD an! Bestimmen Sie anschließend die Seitenlänge des Quadrates!



Lösung

Das Quadrat AEDF hat eine Seitenlänge von 1 cm und somit einen Flächeninhalt von

$$\begin{aligned} A_{\text{AEDF}} &= 1 \text{ cm}^2 \cdot 1 \\ &= 1 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Das Dreieck AED ist genau halb so groß wie das Quadrat AEDF und hat somit einen Flächeninhalt von $A_{\text{AED}} = 0,5 \text{ cm}^2$.

Das Quadrat ABCD besteht aus 4 solcher Dreiecke; damit lässt sich der Flächeninhalt bestimmen:

$$\begin{aligned} A_{\text{ABCD}} &= 4 \cdot A_{\text{AED}} \\ &= 4 \cdot 0,5 \text{ cm}^2 = 2 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Antwort: Das Quadrat ABCD hat einen Flächeninhalt von 2 cm^2 .

Um nun die Seitenlänge des Quadrates ABCD mit einem Flächeninhalt von $A = 2 \text{ cm}^2$ zu bestimmen, muss die Quadratwurzel aus 2 berechnet werden.

Lehrbeispiel 4

Überprüfen Sie durch Quadrieren, welcher der angegebenen Dezimalbrüche am nächsten bei $\sqrt{2}$ liegt!

1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; 1,414214

Lösung

$$\begin{aligned}
1,41^2 &= 1,9881 \\
1,414^2 &= 1,999396 \\
1,4142^2 &= 1,99996164 \\
1,41421^2 &= 1,999989924 \\
1,414214^2 &= 2,000001238
\end{aligned}$$

Antwort: Die Dezimalzahl 1,414214 liegt $\sqrt{2}$ am nächsten.

Im folgenden Beweis soll gezeigt werden, warum das Quadrat eines endlichen Dezimalbruches nicht 2 sein kann.

Annahme: $\sqrt{2}$ lässt sich als gekürzter Bruch darstellen.

Beweis: $\sqrt{2} = p/q$; $p, q \in \mathbb{N}$, ggT (größter gemeinsamer Teiler) von $p, q = 1$

$$2 = (p/q)^2$$

$$2 = p^2/q^2 \quad | \cdot q^2$$

$$2q^2 = p^2$$

Aus der letzten Zeile würde folgen, dass p^2 das 2-fache von q^2 und damit eine gerade Zahl wäre. Damit wäre aber auch p eine gerade Zahl, denn nur gerade Zahlen ergeben quadriert ebenfalls gerade Zahlen. Daraus folgt in entsprechender Weise, dass auch q eine gerade Zahl sein müsste. Beide Folgerungen stehen im Widerspruch zur Annahme.

Antwort: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Zahlen, die sich als unendliche, nicht periodische Dezimalzahlen darstellen lassen, heißen irrationale Zahlen.

$$\sqrt{2} = 1,41421\dots$$

$$\sqrt{5} = 2,23606\dots$$

$$\sqrt{10} = 3,16227\dots$$

Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} . Die Menge der irrationalen Zahlen ist $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (Lies: \mathbb{R} ohne \mathbb{Q}).

Für die Menge der positiven reellen Zahlen einschließlich der Null schreibt man \mathbb{R}_+ für die Menge der negativen reellen Zahlen einschließlich der Null schreibt man \mathbb{R}_- .

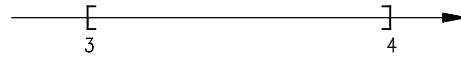
Lehrbeispiel 5

Bestimmen Sie, zwischen welchen Dezimalzahlen (3 Nachkommastellen) die $\sqrt{11}$ liegt!

Lösung

Im **Intervall** $[3; 4]$ liegen alle Zahlen, die größer gleich 3 und kleiner gleich 4 sind. 3 und 4 sind **Intervallgrenzen**.

$\sqrt{11}$ liegt zwischen 3 und 4, denn $3^2 \leq 11 \leq 4^2$



Das Intervall $[3; 4]$ wird nun in 10 gleich große Abschnitte geteilt. Anschließend wird das Teilintervall bestimmt, in dem $\sqrt{11}$ liegt.

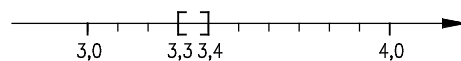
$$3,1^2 = 9,61 \leq 11$$

$$3,3^2 = 10,89 \leq 11$$

$$3,4^2 = 11,56 \geq 11$$

$$3,3^2 \leq 11 \leq 3,4^2$$

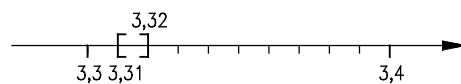
$$3,3 \leq \sqrt{11} \leq 3,4$$



$$3,31^2 = 10,9561 \leq 11$$

$$3,32^2 = 11,0224 \geq 11$$

$$3,31^2 \leq 11 \leq 3,32^2 \quad 3,31 \leq \sqrt{11} \leq 3,32$$

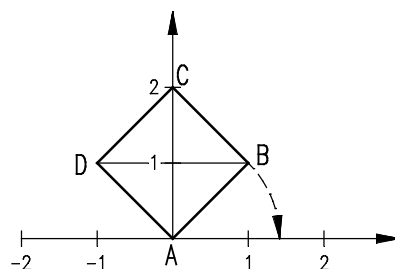


Intervallschachtelung: $[3; 4]$, $[3,3; 3,4]$, $[3,31; 3,32]$...

Jedes Intervall ist im vorhergehenden enthalten. Es gibt somit genau eine reelle Zahl, die in allen Intervallen liegt.

Lehrbeispiel 6

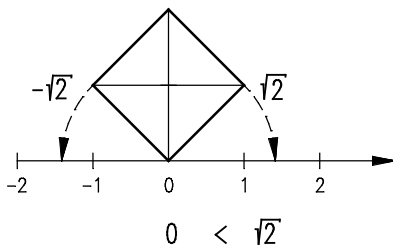
Bestimmen Sie die Seitenlänge des abgebildeten Quadrates ABCD!



Lösung

Der Flächeninhalt des Quadrates ABCD beträgt 2 cm^2 . Die Seitenlänge berechnet sich demnach als $a = \sqrt{2} \text{ cm}$. Überträgt man nun mit dem Zirkel die Seitenlänge des Quadrates auf die Zahlengerade, so erhält man genau den Punkt, zu dem die Zahl $\sqrt{2}$ gehört.

Reelle Zahlen lassen sich auf der Zahlengeraden darstellen. Zu jedem Punkt auf der Zahlengeraden gehört genau eine reelle Zahl. Von zwei reellen Zahlen liegt die kleinere links, die größere rechts.



Für die reellen Zahlen gelten die gleichen Gesetze wie für die rationalen Zahlen.

Addition**Kommutativgesetz**

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a + b = b + a$$

Assoziativgesetz

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

0 ist das **neutrale Element** der Addition.

Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Das **inverse Element** einer Zahl ist ihre **Gegenzahl**.

Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a + (-a) = 0$$

Distributivgesetz

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Multiplikation

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

1 ist das **neutrale Element** der Multiplikation.

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Das **inverse Element** einer Zahl ist ihr **Kehrwert**.

Für alle $a \in \mathbb{R}^*$ (\mathbb{R} ohne die Null) gilt:

$$a \cdot 1/a = 1$$

Lehrbeispiel 7

Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$$

Lösung

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} &= \sqrt{2 \cdot 8} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4\end{aligned}$$

Für alle $a, b \in \mathbb{R}_+$ gilt: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

Beispiele:

$$\begin{aligned}\sqrt{4} \cdot \sqrt{25} &= \sqrt{100} = 10 \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{4,5} &= \sqrt{9} = 3\end{aligned}$$

Lehrbeispiel 8

Ziehen Sie die Wurzel teilweise!

$$\sqrt{50}$$

Lösung

$$\begin{aligned}\sqrt{50} &= \sqrt{25 \cdot 2} \\ &= \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} \\ &= 5 \cdot \sqrt{2}\end{aligned}$$

Lehrbeispiel 9

Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

$$\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{2}}$$

Lösung

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{2}} &= \sqrt{\frac{200}{2}} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10\end{aligned}$$

Für alle $a, b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ gilt: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Beispiele:

$$\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{4}} = \sqrt{16} = 4$$

$$\frac{\sqrt{490}}{\sqrt{10}} = \sqrt{49} = 7$$

Lehrbeispiel 10

Wenden Sie das Distributivgesetz an und vereinfachen Sie so weit wie möglich!

$$4\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$$

Lösung

$$\begin{aligned} & 4\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \\ &= 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \\ &= (4 - 2)\sqrt{3} + (5 - 3)\sqrt{2} \\ &= \underline{2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Gleiche Wurzeln können wie bei der Addition und Subtraktion von Variablen zusammengefasst werden.

2.5 Komplexe Zahlen

Soll nun die Gleichung $x^2 = -4$ gelöst werden, so ist in der Menge der reellen Zahlen keine Lösung zu finden. Setzt man für $x = -2$, dann ist $x^2 = +4$, setzt man $x = +2$, dann ist ebenfalls $x^2 = +4$.

Um aber auch Gleichungen der Form $x^2 = a$ mit $a < 0$ lösen zu können, muss noch einmal der Zahlenbereich von \mathbb{R} erweitert werden.

Leonhard Euler hat folgende Definition eingeführt:

$$j = \sqrt{-1} \leftrightarrow j^2 = -1$$

Mithilfe dieser Definition lässt sich nun auch die Gleichung $x^2 = -4$ lösen.

$$x^2 = -4$$

$$x = +\sqrt{-4}$$

$$x_1 = +\sqrt{4 \cdot (-1)}$$

$$x_1 = 2j$$

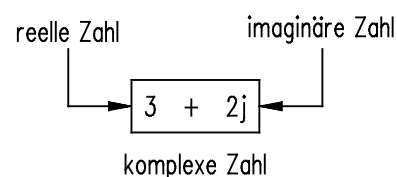
✓

$$x = -\sqrt{-4}$$

$$x_2 = -\sqrt{4 \cdot (-1)}$$

$$x_2 = -2j$$

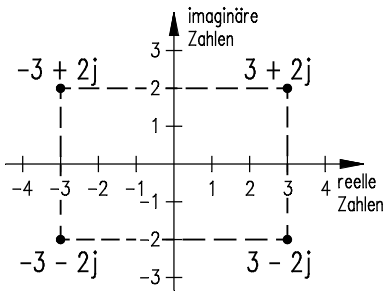
Diese Zahlen werden als **imaginäre Zahlen** bezeichnet. Da in dieser neuen Zahlenmenge auch die Grundrechenarten unbeschränkt ausgeführt werden sollen, entstehen Summen, die eine reelle Zahl und eine imaginäre Zahl enthalten.



Summen aus je einer reellen Zahl a und einer imaginären Zahl bj heißen **komplexe Zahlen**.

$$a + bj$$

Komplexe Zahlen lassen sich nicht auf der Zahlengeraden darstellen. Da sie aus zwei Komponenten bestehen, benötigt man auch eine zweidimensionale Darstellung. Daher werden komplexe Zahlen grafisch in der nach dem Mathematiker Carl Friedrich Gauß benannten **Gaußschen Zahlenebene** dargestellt. Dabei wird der reelle Anteil auf der waagerechten x-Achse, der imaginäre Anteil auf der senkrechten y-Achse abgetragen.



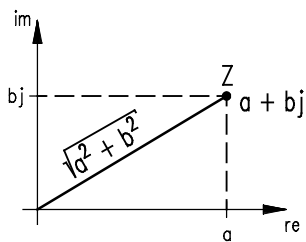
Jede komplexe Zahl lässt sich als Punkt in den vier Quadranten der Gaußschen Zahlenebene darstellen.

Zwei komplexe Zahlen, die sich nur durch ihr Vorzeichen ihres imaginären Anteils unterscheiden, heißen **konjugiert komplexe Zahlen**.

$$\begin{array}{cc} -2 + 3j & 3 + 2j \\ -2 - 3j & 3 - 2j \end{array}$$

Weil komplexe Zahlen als Punkt in der Gaußschen Zahlenebene erscheinen, ist es nicht möglich, die Beziehungen größer (>) oder kleiner (<) zu verwenden.

Ebenso ist es nicht möglich, von positiven oder negativen komplexen Zahlen zu sprechen. Daher ist analog zu den reellen Zahlen der **Abstand des Punktes vom Ursprung** der Zahlenebene als **absoluter Betrag** definiert worden.



Unter dem Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl $z = a + bj$ versteht man den Wert

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}; a, b \in \mathbb{R}$$

$$|z| \geq 0$$

Mithilfe der komplexen Zahlen können z.B. Schwingungsvorgänge in der Physik oder Elektrotechnik berechnet werden.

Zusammenfassende Übersicht über die Zahlenmengen

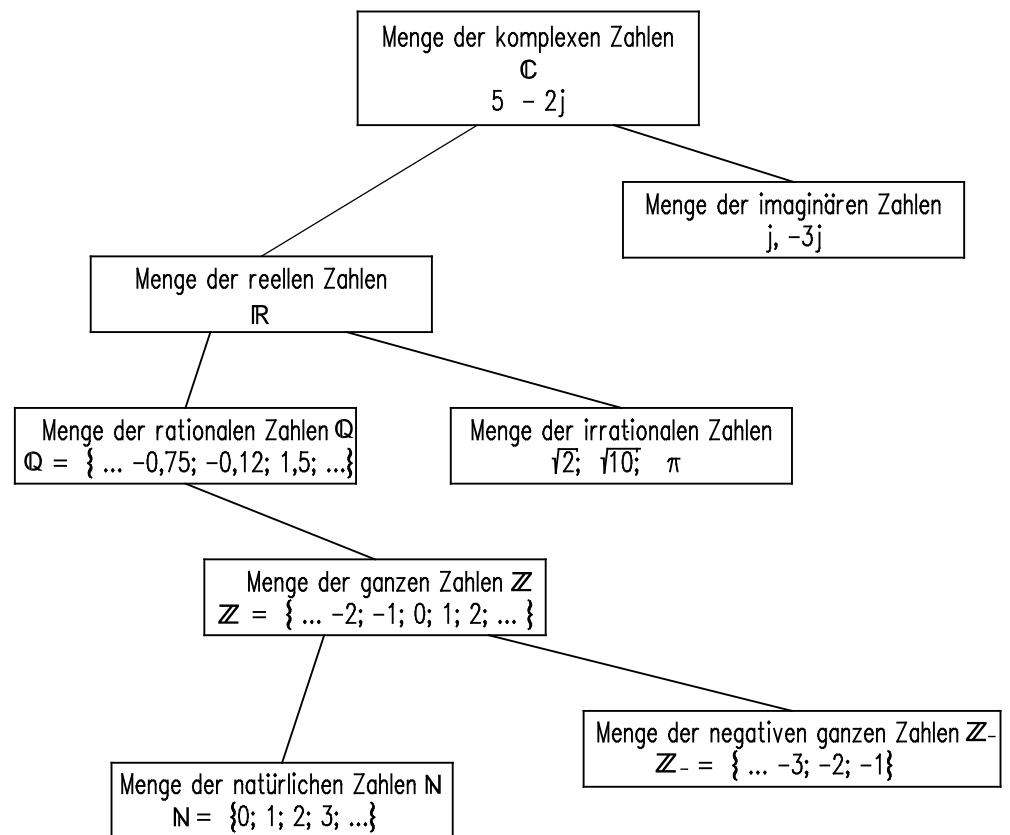


Abbildung 2 Übersicht über die Zahlenmengen

Aufgabe 1

Zu welchen Mengen (\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{Q}_+ , \mathbb{Q}) gehört die Zahl?

1.1 8

1.2 -6

1.3 $12\frac{1}{2}$

1.4 -10,5

1.5 8,1

1.6 -20

1.7 100

Aufgabe 2

Vergleichen Sie jeweils die beiden Zahlen mithilfe der Zeichen <, > und =!

2.1 3 5

2.2 7 -8

2.3 $-2\frac{1}{2}$ -5

2.4 20,01 -21

2.5 -1 1

2.6 -9 -9

Aufgabe 3

Bestimmen Sie jeweils die Gegenzahl und den Betrag der rationalen Zahl!

3.1 -15

3.2 3,4

3.3 $-4\frac{1}{2}$

3.4 -8,35

Aufgabe 4

Quadrieren Sie die angegebenen Zahlen!

4.1 7

4.2 -2

4.3 -0,4

4.4 $\frac{2}{5}$

4.5 -1,2

Aufgaben

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Quadratwurzel!

5.1 $\sqrt{144}$

5.2 $\sqrt{1}$

5.3 $\sqrt{3,24}$

5.4 $\sqrt{0,81}$

5.5 $\sqrt{0,0049}$

Aufgabe 6

Bestimmen Sie $\sqrt{3}$ näherungsweise durch eine Intervallschachtelung auf zwei Nachkommastellen!

Aufgabe 7

Stellen Sie die folgenden reellen Zahlen auf der Zahlengeraden dar und ordnen Sie sie der Größe nach!

7.1 $1 + \sqrt{2}$

7.2 $-\sqrt{2}$

7.3 $-\sqrt{2} - 1$

7.4 $1 - \sqrt{2}$

Aufgabe 8

Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

8.1 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$

8.2 $\sqrt{50} \cdot \sqrt{8}$

8.3 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{24,5}$

Aufgabe 9

Ziehen Sie die Wurzel teilweise!

9.1 $\sqrt{128}$

9.2 $\sqrt{1210}$

9.3 $\sqrt{245}$

Aufgabe 10

Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

$$10.1 \quad \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$$

$$10.2 \quad \frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}}$$

$$10.3 \quad \frac{\sqrt{2,45}}{\sqrt{5}}$$

Aufgabe 11

Fassen Sie zusammen!

$$11.1 \quad 7\sqrt{5} + 24\sqrt{3} - 3\sqrt{5} - 17\sqrt{3}$$

$$11.2 \quad 17\sqrt{6} + 30\sqrt{7} - \sqrt{6} - 25\sqrt{7}$$

Aufgabe 12

Machen Sie den Nenner rational!

$$12.1 \quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}}$$

$$12.2 \quad \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

Aufgabe 13

Stellen Sie die komplexe Zahl in der Gauß'schen Zahlenebene dar!

$$13.1 \quad -2 + 3j$$

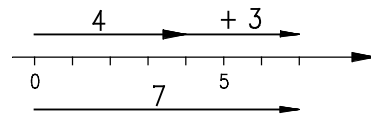
$$13.2 \quad 3 - 2j$$

Lernbereich

3 Grundrechenarten

3.1 Addition und Subtraktion

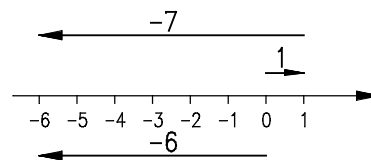
Im nachfolgenden Beispiel ist die Rechenoperation der **Addition** der zwei Zahlen 4 und 3 dargestellt.



$$\begin{array}{ccccccc} 4 & + & 3 & = & 7 \\ \text{Summand} & \text{plus} & \text{Summand} & \text{gleich} & \text{Wert der Summe} \end{array}$$

S u m m e

Im nachfolgenden Beispiel ist die Rechenoperation der Subtraktion der zwei Zahlen 1 und 7 dargestellt.



$$\begin{array}{ccccccc} 1 & - & 7 & = & -6 \\ \text{Minuend} & \text{minus} & \text{Subtrahend} & \text{gleich} & \text{Wert der Differenz} \end{array}$$

D i f f e r e n z

Lehrbeispiel 1

Addieren bzw. subtrahieren Sie!

$$7 + (-9) \quad 15 - (-20)$$

Lösung

$$7 + (-9) = 7 - 9 = -2$$

$$15 - (-20) = 15 + 20 = 35$$

Eine **negative Zahl** wird **addiert**, indem die **Gegenzahl** **subtrahiert** wird.

$$5 + (-2) = 5 - 2 = 3$$

Eine **negative Zahl** wird **subtrahiert**, indem die **Gegenzahl** **addiert** wird.

$$5 - (-2) = 5 + 2 = 7$$

Lehrbeispiel 2

Addieren Sie die rationalen Zahlen und vergleichen Sie die Vorzeichen der Summanden und des Ergebnisses!

$$(+6) + (+4) \quad (-6) + (-4) \quad (-12) + (+7) \quad (+12) + (-7)$$

Lösung

$$\begin{array}{ll} (+6) + (+4) & = +10 \\ (-12) + (+7) & = -5 \end{array} \quad \begin{array}{ll} (-6) + (-4) & = -10 \\ (+12) + (-7) & = +5 \end{array}$$

Rationale Zahlen mit gleichen Vorzeichen werden addiert, indem man die Beträge addiert und das gemeinsame Vorzeichen setzt.

$$\begin{array}{l} (+2,5) + (+3,5) = +6 \\ (-8,1) + (-1,9) = -10 \end{array}$$

Rationale Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen werden addiert, indem man die Beträge subtrahiert und das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag setzt.

$$\begin{array}{l} (+12) + (-4,5) = +7,5 \\ (-2,2) + (+1,1) = -1,1 \end{array}$$

Lehrbeispiel 3

Subtrahieren Sie die rationalen Zahlen und vergleichen Sie mit der Additionsaufgabe!

$$(+8) - (+6) \quad (+8) + (-6) \quad (-15) - (-5) \quad (-15) + (+5)$$

Lösung

$$\begin{array}{ll} (+8) - (+6) & = +2 \\ (-15) - (-5) & = -10 \end{array} \quad \begin{array}{ll} (+8) + (-6) & = +2 \\ (-15) + (+5) & = -10 \end{array}$$

Rationale Zahlen werden subtrahiert, indem die Gegenzahl addiert wird.

$$\begin{array}{ll} (+20) - (+15) & = (+20) + (-15) = 5 \\ (-14) - (-8) & = (-14) + (+8) = -6 \end{array}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise können Summen und Differenzen auch ohne Klammern geschrieben werden. Dabei gelten folgende Regeln:

Sind **Rechenzeichen und Vorzeichen der zweiten Zahl gleich**, so wird ein **Pluszeichen** geschrieben. Sind **Rechenzeichen und Vorzeichen der zweiten Zahl verschieden**, so wird ein **Minuszeichen** geschrieben.

Lehrbeispiel 4

Vereinfachen Sie die Schreibweise und berechnen Sie!

$$(-29) + (+15) \quad (+44) + (-14) \quad (+8) - (-32) \quad (-55) - (+25)$$

Lösung

$$(-29) + (+15) = -29 + 15 = -14 \quad (+44) + (-14) = 44 - 14 = 30$$

$$(+8) - (-32) = 8 + 32 = 40 \quad (-55) - (+25) = -55 - 25 = -80$$

Rationale Zahlen sind **Terme**.

Summen, Differenzen, Produkte von Termen sind Terme.

Summen

$$50 + 11; -22 + (-13)$$

Differenzen

$$142 - 17; -28 - (-18)$$

Produkte

$$-4 \cdot 5; -7 \cdot (-11)$$

Quotienten von Termen sind Terme, wenn der Term im Nenner nicht die Zahl Null bezeichnet.

Quotienten

$$45 : 9; -20 : (-5)$$

Variablen (Platzhalter für Zahlen) und Verknüpfungen von Variablen sind ebenfalls Terme.

Variablenterme

$$a + b; 3 - x$$

Lehrbeispiel 5

Berechnen Sie die zusammengesetzten Terme!

$$-5 \cdot 15 + 18 : 3$$

Lösung

$$\begin{array}{rcl} -5 \cdot 15 & + & 18 : 3 \\ = -75 & + & 6 \\ = & -69 & \end{array}$$

Punktrechnung geht vor Strichrechnung.

Lehrbeispiel 6

Berechnen Sie $(-18 + 12) \cdot (25 - 15)$!

Lösung

$$\begin{array}{rcl}
 (-18 + 12) \cdot (25 - 15) & & \\
 = -6 \cdot 10 & & \\
 = -60 & &
 \end{array}$$

Was in der Klammer steht, wird zuerst berechnet.

Gesetzmäßigkeiten**Kommutativgesetz** der Addition

$$\begin{aligned}
 (-5) + (+8) &= (+8) + (-5) = 3 \\
 (+1/2) + (-1/4) &= (-1/4) + (+1/2) = +1/4
 \end{aligned}$$

Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$a + b = b + a$$

0 ist das **neutrale Element** der Addition.

Für alle $a \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Assoziativgesetz der Addition

$$\begin{aligned}
 [12,5 + (-2,5)] + 8 &= 12,5 + [(-2,5) + 8] \\
 &= 12,5 + 5,5 \\
 &= 18
 \end{aligned}$$

Für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

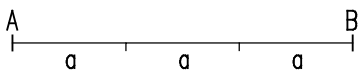
Das **inverse Element** einer Zahl ist ihre **Gegenzahl**.

Für alle $a \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$a + (-a) = 0$$

Lehrbeispiel 7

Bestimmen Sie die Gesamtlänge der Strecke \overline{AB} zunächst mithilfe eines Variablen-terms! Berechnen Sie anschließend! Setzen Sie für $a = 3 \text{ m}$!

**Lösung**

$$\begin{aligned}
 \overline{AB} &= a + a + a \\
 &= 3 \cdot a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{AB} &= 3 \cdot 3 \text{ m} \\
 &= 9 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Antwort: Die Gesamtlänge der Strecke beträgt 9 m.

Für gleiche Variablen in einem Term ist immer die gleiche Zahl einzusetzen.

Terme mit den selben Variablen heißen **äquivalent** (gleichwertig), wenn sie bei jeder Einsetzung von Zahlen gleiche Werte ergeben.

$$a + a + a = 3 \cdot a$$

/
\

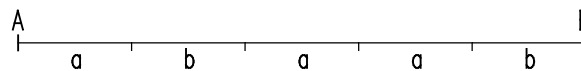
Koeffizient Variable

Vereinfachte Schreibweise bei Variablentermen

$5 \cdot x = 5x$	Steht ein Koeffizient vor einer Variablen, so kann das „ \cdot “-Zeichen weg gelassen werden.
$1 \cdot a = 1a = a$	Der Koeffizient 1 wird weg gelassen.
$a \cdot b \cdot c = abc$	Bei einem Produkt aus Variablen fallen die „ \cdot “- Zeichen weg.
$t \cdot e \cdot r \cdot m = emrt$	Bei Termen werden die Variablen nach dem Alphabet geordnet.

Lehrbeispiel 8

Bestimmen Sie die Gesamtlänge der Strecke \overline{AB} zunächst mithilfe eines Variablenterms. Berechnen Sie anschließend. Setzen Sie für $a = 2 \text{ cm}$ und $b = 4 \text{ cm}$.



Lösung

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= a + b + a + a + b \\ &= a + a + a + b + b \\ &= 3a + 2b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= 3 \cdot 2 \text{ cm} + 2 \cdot 4 \text{ cm} \\ &= 14 \text{ cm}\end{aligned}$$

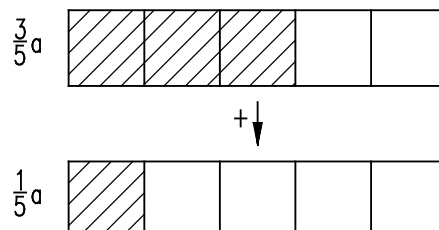
Antwort: Die Gesamtlänge der Strecke beträgt 14 cm.

In Summen und Differenzen können nur gleichartige Terme zusammen gefasst werden. Dabei werden die Koeffizienten der Variablenterme addiert bzw. subtrahiert.

$$\begin{aligned}3a + 2a &= (3 + 2)a = 5a \\ 15x - 7x &= (15 - 7)x = 8x\end{aligned}$$

Lehrbeispiel 9

Addieren Sie die Terme, die durch die markierten Flächen dargestellt werden!



Lösung

Die Gesamtfläche des Streifendiagramms wird mit der Variablen a bezeichnet. Dann ist die erste Bruchzahl $3/5$. Im zweiten Streifen ist der Anteil $1/5 a$ markiert. Somit ergibt sich als Additionsaufgabe: $3/5 a + 1/5 a = 4/5 a$.

Gleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem die Zähler addiert bzw. subtrahiert werden und der Nenner unverändert bleibt.

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{1}{6x} - \frac{5}{6x} = -\frac{4}{6x}$$

Lehrbeispiel 10

Vereinfachen Sie den Term!

$$\frac{9}{11a} - \left(-\frac{5}{33a}\right) + \frac{2}{7b} + \left(-\frac{9}{14b}\right)$$

Lösung

$$\frac{9}{11a} - \left(-\frac{5}{33a}\right) + \frac{2}{7b} + \left(-\frac{9}{14b}\right)$$

$$= \frac{9}{11a} + \frac{5}{33a} + \frac{2}{7b} - \frac{9}{14b}$$

$$= \frac{27}{33a} + \frac{5}{33a} + \frac{4}{14b} - \frac{9}{14b}$$

$$= \underline{\underline{\frac{32}{33a} - \frac{5}{14b}}}$$

Ungleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem sie vor dem Addieren bzw. Subtrahieren gleichnamig gemacht werden.

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{10}{12} + \frac{9}{12} = \frac{19}{12}$$

$$= 1 \frac{7}{12}$$

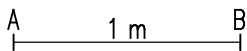
$$-\frac{9}{10y} - \frac{9}{15y} = -\frac{27}{30y} - \frac{18}{30y}$$

$$= -\frac{45}{30y} = -1 \frac{1}{2} y$$

Lehrbeispiel 11

Eine Strecke \overline{AB} wird in x gleich lange Teilstrecken zerlegt.

Geben Sie einen allgemeinen Term für die Länge einer Teilstrecke an.



Lösung

Die Länge einer Teilstrecke ist der x-te Teil von 1 m.

Antwort: Länge einer Teilstrecke: $\frac{1}{x}$

In den Bruch $\frac{1}{x}$ können selbstverständlich nicht nur natürliche Zahlen eingesetzt werden.

Terme, bei denen im Nenner eine oder mehrere Variablen vorkommen, werden Bruchterme genannt. Dabei darf der Term im Nenner nicht die Zahl Null bezeichnen, da die Division durch Null nicht erlaubt ist.

$$\frac{1/x}{ab} \quad \frac{\frac{b+5}{a}}{5x+y}$$

Um festzustellen, für welche Einsetzungen der Term im Nenner die Zahl Null bezeichnet, muss die **Definitionsmenge** bestimmt werden.

Lehrbeispiel 12

Bestimmen Sie, für welche Einsetzungen der Term im Nenner die Zahl Null bezeichnet!

$$\frac{1}{x-1}$$

Lösung

Wenn der Term im Nenner $x - 1$ Null wird, muss gelten:

$$\boxed{x} - 1 = 0$$

Dann ist: $\boxed{1} - 1 = 0$

Antwort: Wenn für x die Zahl 1 eingesetzt wird, bezeichnet der Term $x - 1$ die Zahl Null.

Bei Bruchtermen muss angegeben werden, welche Einsetzungen für den Term erlaubt sind. Alle Zahlen, die eingesetzt werden dürfen, bilden die Definitionsmenge D .

Bruchterm: $\frac{10}{x-2}$

Grundmenge: $G = \mathbb{Q}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$

gelesen: D ist die Menge aller rationalen Zahlen ohne die Zahl 2.

Lehrbeispiel 13

Fassen Sie die Bruchterme zusammen!

$$\frac{4}{x} + \frac{5}{x}$$

Lösung

$$\frac{4}{x} + \frac{5}{x} = \frac{4+5}{x}$$

$$= \frac{9}{x}$$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

Gleichnamige Bruchterme werden addiert (subtrahiert), indem man die Zähler addiert (subtrahiert) und den Term im Nenner beibehält.

Lehrbeispiel 14*Fassen Sie zusammen!*

$$\frac{3a-5}{5-z} - \frac{7}{5-z}$$

LösungDefinitionsmenge: $D = \mathbb{Q} \setminus \{5\}$

$$\frac{3a-5}{5-z} - \frac{7}{5-z} = \frac{3a-5-7}{5-z}$$

$$= \frac{3a-12}{5-z}$$

Lehrbeispiel 15*Fassen Sie die Bruchterme zusammen!*

$$\frac{10}{a} + \frac{5}{b}$$

Lösung

Analog zur Addition ungleichnamiger Brüche wird bei ungleichnamigen Bruchtermen zunächst der Hauptnenner bestimmt.

$$\frac{10}{a} + \frac{5}{b} \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

Hauptnenner: $a \cdot b = ab$

Im nächsten Lösungsschritt werden beide Bruchterme auf den Hauptnenner erweitert und anschließend addiert.

$$\frac{10b}{ab} + \frac{5a}{ab} = \frac{5a+10b}{ab}$$

Lehrbeispiel 16

Machen Sie gleichnamig und fassen Sie zusammen!

$$\frac{32x}{27y} - \frac{18x}{36y}$$

Lösung

$$\frac{32x}{27y} - \frac{18x}{36y}$$

$$D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

Wenn im Nenner vor den Variablen Koeffizienten stehen, muss auch von diesen das kgV bestimmt werden.

$$\begin{aligned} 27 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \\ 36 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ \text{kgV}(27/36) &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= 108 \end{aligned}$$

Anschließend wird der Hauptnenner bestimmt.

$$\text{Hauptnenner: } 108 \cdot y = 108y$$

Auf den Hauptnenner erweitert:

$$\begin{aligned} \frac{32x \cdot 4}{108y} - \frac{18x \cdot 3}{108y} &= \frac{128x}{108y} - \frac{54x}{108y} \\ &= \frac{74x}{108y} \end{aligned}$$

Lassen sich die Koeffizienten noch kürzen, wird dieses auch durchgeführt.

$$\begin{aligned} \frac{74x}{108y} &= \frac{37x}{54y} \\ 74 &= 2 \cdot 37 \\ 108 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \\ \text{ggT}(74/108) &= 2 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 17

Fassen Sie zusammen!

$$\frac{x}{y} - 1$$

Lösung

$$\frac{x}{y} - 1$$

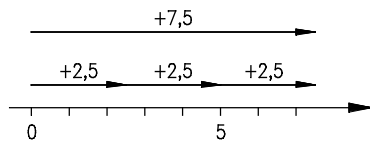
$$D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

Bei dieser Aufgabe ist zu beachten, dass jede ganze Zahl ein Bruch mit dem Nenner 1 ist.

Hauptnenner: y $\frac{x}{y} - \frac{y}{y} = \frac{x-y}{y}$

3.2 Multiplikation und Division

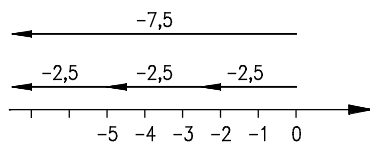
In dem Pfeilbild ist die Addition von drei gleichen Summanden dargestellt. Die Multiplikation stellt eine verkürzte Schreibweise der Addition gleicher Summanden dar.



$$\begin{array}{ccccccc} 3 & \cdot & (+2,5) & = & +7,5 \\ \text{Faktor} & \text{mal} & \text{Faktor} & \text{gleich} & \text{Wert des Produktes} \end{array}$$

Produkt

Das folgende Pfeilbild stellt das Produkt $3 \cdot (-2,5) = -7,5$ dar.



Die folgenden Beispielaufgaben sollen verdeutlichen, wie man zu sinnvollen Vorzeichenregeln gekommen ist.

$3 \cdot 4 = 12$	$3 \cdot 3 = 9$	$-5 \cdot 4 = -20$	$-4 \cdot 0,5 = -2$
$2 \cdot 4 = 8$	$3 \cdot 2 = 6$	$-5 \cdot 3 = -15$	$-3 \cdot 0,5 = -1,5$
$1 \cdot 4 = 4$	$3 \cdot 1 = 3$	$-5 \cdot 2 = -10$	$-2 \cdot 0,5 = -1$
$0 \cdot 4 = 0$	$3 \cdot 0 = 0$	$-5 \cdot 1 = -5$	$-1 \cdot 0,5 = -0,5$
$-1 \cdot 4 = -4$	$3 \cdot (-1) = -3$	$-5 \cdot (-1) = +5$	$0 \cdot 0,5 = 0$
$-2 \cdot 4 = -8$	$3 \cdot (-2) = -6$	$-5 \cdot (-2) = +10$	$1 \cdot 0,5 = +0,5$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

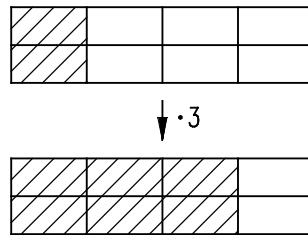
Bei der Multiplikation zweier rationaler Zahlen mit gleichen Vorzeichen werden die Beträge multipliziert und das Vorzeichen „+“ gesetzt.

$$\begin{array}{lll} +5 & \cdot & (+6) = +30 \\ -7 & \cdot & (-2) = +14 \\ -1,5 & \cdot & (-1,5) = +2,25 \end{array}$$

Bei der Multiplikation zweier rationaler Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen werden die Beträge multipliziert und das Vorzeichen „-“ gesetzt.

$$\begin{array}{lll} +8 & \cdot & (-5) = -40 \\ -2 & \cdot & (+11) = -22 \\ +0,8 & \cdot & (-0,7) = -0,56 \end{array}$$

Das folgende Streifendiagramm verdeutlicht die Multiplikation des Bruches $\frac{2}{8}$ mit der ganzen Zahl 3.



Die markierte Fläche entspricht einem Anteil von $\frac{6}{8}$.
Also gilt:

$$\frac{2}{8} \cdot 3 = \frac{6}{8}$$

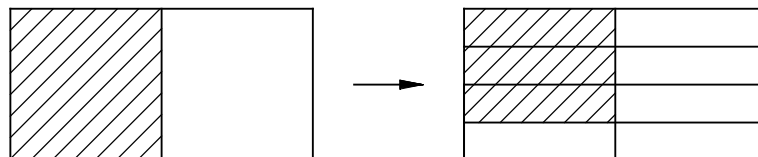
Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem der Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert und der Nenner beibehalten wird.

$$-\frac{3}{4} \cdot 5 = -\frac{15}{4}$$

$$\frac{2}{7} \cdot (-3) = -\frac{6}{7}$$

Lehrbeispiel 1

Geben Sie den Zahlenterm für das Streifendiagramm an!



Lösung

Im ersten Streifen ist die Bruchzahl $\frac{1}{2}$ dargestellt. Im zweiten Streifen ist die Bruchzahl $\frac{3}{8}$ dargestellt. Also ist ein Zusammenhang herzustellen zwischen den Bruchzahlen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{8}$.

$$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{8}$$

Schaut man sich die beiden markierten Hälften jeweils an, so ist zu erkennen, dass die Hälfte im zweiten Streifen in vier Teile unterteilt worden ist. Von diesen Teilen sind wiederum drei markiert. Also sind im zweiten Streifen $\frac{3}{4}$ von $\frac{1}{2}$ markiert.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$$

Ein Bruch wird mit einem Bruch multipliziert, indem die Zähler miteinander und die Nenner miteinander multipliziert werden.

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{35}$$

$$-\frac{3}{8} \cdot (-\frac{3}{5}) = \frac{9}{40}$$

Lehrbeispiel 2*Multiplizieren Sie die Bruchterme miteinander!*

$$\frac{3}{5x} \cdot \frac{y}{10x}$$

Lösung

$$\frac{3}{5x} \cdot \frac{y}{10x}$$

$$D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

Auch für Bruchterme gilt die Regel: Die Zähler und die Nenner werden jeweils miteinander multipliziert.

$$\begin{aligned} \frac{3}{5x} \cdot \frac{y}{10x} &= \frac{3 \cdot y}{5x \cdot 10x} \\ &= \frac{3y}{50x^2} \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 3*Multiplizieren Sie!*

$$\frac{12xy}{5ab} \cdot \frac{15b^2}{3y}$$

Lösung

$$\frac{12xy}{5ab} \cdot \frac{15b^2}{3y}$$

$$D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

Bevor jeweils die Zähler und Nenner miteinander multipliziert werden, muss überprüft werden, ob die Brüche noch gekürzt werden können.

$$\begin{aligned} \frac{\overset{4}{\cancel{12}}\overset{1}{\cancel{x}}\overset{3}{\cancel{y}}}{\underset{1}{\cancel{5}}\underset{1}{\cancel{a}}\underset{1}{\cancel{b}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{15}}\underset{1}{\cancel{b}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\underset{1}{\cancel{y}}} &= \frac{4x \cdot 3b}{a} \\ &= \frac{12bx}{a} \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 4*Multiplizieren Sie!*

$$\frac{7}{3x^2y} \cdot 9xy$$

Lösung

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 3 \\ \hline 21 \\ \hline \end{array}$$

$$D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

Gesetzmäßigkeiten

Kommutativgesetz der Multiplikation

$$(-7) \cdot 5 = 5 \cdot (-7) = -35$$

Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Die Zahl 1 ist das **neutrale Element** der Multiplikation.

Für alle $a \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Assoziativgesetz der Multiplikation

$$(5 \cdot 3) \cdot (-2) = 5 \cdot [3 \cdot (-2)] = 5 \cdot 3 \cdot (-2)$$

Für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$$

Das **inverse Element** einer Zahl ist ihr Kehrwert.

$$\begin{array}{l} -3 \cdot (-1/3) = 1 \\ 4/7 \cdot 7/4 = 1 \end{array}$$

Für alle $a \in \mathbb{Q}^*$ gilt:

$$a \cdot 1/a = 1$$

\mathbb{Q}^* ist die Menge aller rationalen Zahlen ohne die Null.

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation. Aus der Multiplikationsaufgabe $7 \cdot 9 = 63$ lässt sich durch Umkehrung jeweils einer der Faktoren bestimmen:

$$\begin{array}{ccccccc} 63 & : & 7 & = & 9 \\ \text{Dividend} & \text{geteilt durch} & \text{Divisor} & \text{ist gleich} & \text{Wert des Quotienten} \end{array}$$

Quotient

$$\text{oder } 63 : 9 = 7$$

Dabei leiten sich die Vorzeichenregeln der Division von den Regeln der Multiplikation ab.

Bei der Division zweier rationaler Zahlen mit gleichen Vorzeichen werden die Beträge dividiert und das Vorzeichen „+“ gesetzt.

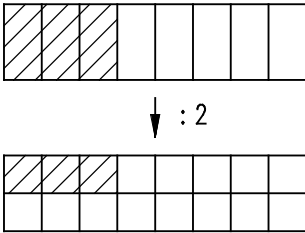
$$\begin{array}{l} +32 : (+8) = +4 \\ -75 : (-15) = +5 \\ -5,7 : (-1,9) = +3 \end{array}$$

Bei der Division zweier rationaler Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen werden die Beträge dividiert und das Vorzeichen „-“, gesetzt.

$$\begin{aligned}
 +96 : (-12) &= -8 \\
 -81 : (+27) &= -3 \\
 0,49 : (-0,7) &= -0,7
 \end{aligned}$$

Das Streifendiagramm verdeutlicht die Division der Bruchzahl $3/8$ durch die ganze Zahl 2. Der Term lautet also:

$$3/8 : 2$$



Der zweite Streifen macht deutlich, dass nach der Division ein Anteil von $3/16$ markiert ist. Also lautet die Division:

$$3/8 : 2 = 3/16$$

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem der Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert wird und der Zähler beibehalten wird.

$$\begin{aligned}
 -4/9 : 5 &= -4/45 \\
 2/15 : (-3) &= -2/45
 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 5

Berechnen Sie, wie viele Flaschen jeweils gefüllt werden können, wenn 20 Liter auf 2 l, 1 l, $1/2$ l und $1/4$ l Flaschen umgefüllt werden sollen!

Lösung

$$20 \text{ l} : 2 \text{ l} = 10 \quad 20 \text{ l} : 1 \text{ l} = 20 \quad 20 \text{ l} : 1/2 \text{ l} = 40 \quad 20 \text{ l} : 1/4 \text{ l} = 80$$

Deutlich wird, dass die Anzahl der Flaschen zunimmt. Dies kann nur durch eine Multiplikation erklärt werden. Also muss gelten:

$$\begin{aligned}
 20 \text{ l} : 1/2 \text{ l} &= 20 \text{ l} \cdot 2/1 \text{ l} = 40 \\
 20 \text{ l} : 1/4 \text{ l} &= 20 \text{ l} \cdot 4/1 \text{ l} = 80
 \end{aligned}$$

Dabei ist **$2/1$ der Kehrwert von $1/2$** , **$4/1$ der Kehrwert von $1/4$** .

Durch einen Bruch wird dividiert, indem mit seinem Kehrwert multipliziert wird.

$$\begin{aligned}
 -20 : (+3/5) &= -20 \cdot (+5/3) \\
 &= -100/3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1/4 : (-3/5) &= 1/4 \cdot (-5/3) \\
 &= -5/12
 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 6

Dividieren Sie die Bruchterme!

$$\frac{3}{a} : \frac{b}{7}$$

Lösung

Bevor bei einer Division durch einen Bruchterm die Definitionsmenge festgelegt wird, muss die Division zunächst in eine Multiplikation umgewandelt werden.

$$\begin{aligned} \frac{3}{a} : \frac{b}{7} &= \frac{3}{a} \cdot \frac{7}{b} & D = \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ &= \frac{21}{ab} \end{aligned}$$

Durch einen Bruchterm wird dividiert, indem mit seinem Kehrwert multipliziert wird.

$$\begin{aligned} \frac{6}{5a} : \frac{a}{3b} &= \frac{6}{5a} \cdot \frac{3b}{a} \\ &= \frac{18b}{5a^2} & D = \mathbb{Q} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 7

Dividieren Sie die Bruchterme! $\frac{5}{ab} : \frac{15}{a^2b}$

Lösung

$$\frac{5}{ab} : \frac{15}{a^2b} = \frac{5}{ab} \cdot \frac{a^2b}{15}$$

Nach dem Umwandeln in eine Multiplikationsaufgabe muss die Definitionsmenge festgelegt und geprüft werden, ob vor der Multiplikation durch Kürzen die Terme zu vereinfachen sind. Der Einfachheit halber soll die Definitionsmenge in Kurzform erfolgen.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{ab}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{a^2b}}}{\cancel{15}_3} = \frac{a}{3} \quad a \neq 0, b \neq 0$$

3.3 Klammerrechnen und Faktorisieren

Kommen in einem Term Verknüpfungen, d.h. mathematische Operationen verschiedener „Hierarchiestufen“ vor, so hängt das Ergebnis entscheidend von der Reihenfolge der durchgeführten Rechenoperationen ab. Dabei sind wichtige Regeln zu beachten, von denen bereits folgende bekannt sind:

- Punktrechnung (Multiplikation und Division) geht vor Strichrechnung (Addition und Subtraktion).

Beispiel: $5 \cdot 3 + 9 = 15 + 9 = 24$

- Was in der Klammer steht, wird zuerst gerechnet.

Beispiel: $10 + (25 - 15) = 10 + 10 = 20$

Darüber hinaus hat man Klammern eingeführt, um zusammenhängende Rechenoperationen mit noch höherer Priorität hervorzuheben.

Man unterscheidet drei verschiedene Klammer Ebenen:

- Die **runden Klammern** stellen die unterste Ebene dar ().
- Die nächst höhere ist die **eckige Klammer** [].
- Die Klammer mit der höchsten Priorität ist die **geschweifte Klammer** { }.

Grundsätzlich gilt die Regel: Was in der Klammer steht wird zuerst berechnet.

Sind in einem Term Klammern verschiedener Ebenen vorhanden, so wird grundsätzlich immer erst die Klammer mit der niedrigsten Stufe aufgelöst (**von innen nach außen**).

Lehrbeispiel 1

Berechnen Sie die Summen und vergleichen Sie:

$$17 + (-3 + 18) \text{ und } 17 - 3 + 18$$

Lösung

$$17 + (-3 + 18) = 17 + 15 = 32 \quad 17 - 3 + 18 = 32$$

Antwort: Beide Terme ergeben die Zahl 32; sie sind also äquivalent.

Steht vor der Klammer ein Pluszeichen („Plusklammer“), so kann die Klammer weggelassen werden. Die Vorzeichen in der Klammer ändern sich nicht.

$$4,5 + (1,5 - 3,5) = 4,5 + 1,5 - 3,5 = 2,5$$

$$-2a + (-3b + 4c) = -2a - 3b + 4c$$

Lehrbeispiel 2

Berechnen und vergleichen Sie!

$$21 - (7 + 13) \text{ und } 21 - 7 - 13$$

Lösung

$$21 - (7 + 13) = 21 - 20 = 1 \qquad 21 - 7 - 13 = 1$$

Antwort: Beide Terme ergeben die Zahl 1; sie sind also äquivalent.

Steht vor der Klammer ein Minuszeichen („Minusklammer“), so müssen beim Auflösen der Klammer die Zeichen vor jedem Summanden in der Klammer umgekehrt werden.

$$\begin{aligned} 18 - (2 - 14) &= 18 - 2 + 14 \\ &= 30 \\ -5a - (-3b + 4c) &= -5a + 3b - 4c \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 3

Lösen Sie die Klammer auf und fassen Sie zusammen!

$$44ab - (-39cd + 17ab - 5) - 49cd$$

Lösung

Vor dem Zusammenfassen muss unbedingt die Klammer aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} 44ab - (-39cd + 17ab - 5) - 49cd &= 44ab + 39cd - 17ab + 5 - 49cd \\ &= 27ab - 10cd + 5 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 4

Berechnen Sie den Term $-(14x^4 - 17x) - (-14x + 17x^4) + (x - x^4)$!

Lösung

Auch wenn vor der Klammer nur ein Minuszeichen steht (also kein weiterer Term), so handelt es sich doch auch um eine „Minusklammer“.

$$\begin{aligned} -(14x^4 - 17x) - (-14x + 17x^4) + (x - x^4) &= -14x^4 + 17x + 14x - 17x^4 + x - x^4 \\ &= -32x^4 + 32x \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 5

Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

$$5x + [-13y - (4x - 17y)]$$

Lösung

Hier ist die Regel zu beachten: Von innen nach außen auflösen; d.h. die eckige Klammer bleibt zunächst unberücksichtigt.

$$5x + [-13y - (4x - 17y)] = 5x + [-13y - 4x + 17y] = 5x - 13y - 4x + 17y = x + 4y$$

Lehrbeispiel 6

Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

$$-\{[12,8xy - (3,4yz + 5,6xy) - (-6,4xy + 12,4yz)] - xy\}$$

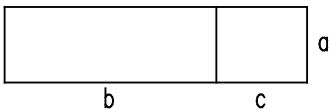
Lösung

Bei einer Aufgabe dieser Komplexität ist es wichtig, die Auflösungsschritte sorgfältig nacheinander durchzuführen.

$$\begin{aligned} & -\{[12,8xy - (3,4yz + 5,6xy) - (-6,4xy + 12,4yz)] - xy\} \\ &= -\{[12,8xy - 3,4yz - 5,6xy + 6,4xy - 12,4yz] - xy\} \\ &= -\{-12,8xy + 3,4yz + 5,6xy - 6,4xy + 12,4yz - xy\} \\ &= +12,8xy - 3,4yz - 5,6xy + 6,4xy - 12,4yz + xy \\ &= 14,6xy - 15,8yz \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 7

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks! Geben Sie zwei Lösungsterme an!

**Lösung**

1. Der Flächeninhalt des gesamten Rechtecks berechnet sich als Produkt beider Seitenlängen:

$$A = a \cdot (b + c)$$

2. Der Flächeninhalt lässt sich jedoch auch als Summe der beiden Teilflächen berechnen:

$$A = a \cdot b + a \cdot c$$

Da beide Flächeninhalte gleich groß sind, müssen auch die entsprechenden Terme gleich sein:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Distributivgesetz

Ein Term wird mit einer Summe multipliziert, indem er mit jedem Summanden der Summe multipliziert wird.

Das Malzeichen vor und hinter der Klammer kann weg gelassen werden.

$$\overset{\curvearrowright}{x} \cdot (y - z) = xy - xz$$

Für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Lehrbeispiel 8

Multiplizieren Sie aus und fassen zusammen!

$$-x(1,4 + y - x) - 3(6,2x - xy + x^2)$$

Lösung

Das Beachten der Vorzeichen der beiden Faktoren vor den Klammern ist wichtig.

$$\begin{aligned} & -x(1,4 + y - x) - 3(6,2x - xy + x^2) \\ &= -1,4x - xy + x^2 - 18,6x + 3xy - 3x^2 \\ &= -2x^2 - 20x + 2xy \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 9

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks. Geben Sie zwei Lösungsterme an.

IV	III	d
I	II	c
a	b	

Lösung

- Der Flächeninhalt des gesamten Rechtecks berechnet sich als Produkt beider Seitenlängen:

$$A = (a + b)(c + d)$$

- Der Flächeninhalt lässt sich jedoch auch als Summe der vier Teilflächen berechnen:

$$A = I + II + III + IV$$

$$= a \cdot c + b \cdot c + b \cdot d + a \cdot d$$

Da beide Flächeninhalte gleich groß sind, müssen auch die entsprechenden Terme äquivalent sein:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Eine Summe wird mit einer Summe multipliziert, indem jeder Summand der ersten Summe mit jedem Summanden der zweiten Summe multipliziert wird und die Teilprodukte addiert werden.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$$

$$(x - y)(r + s) = rx + sx - ry - sy$$

$$(x - y)(z - q) = xz - qx - yz + qy$$

Lehrbeispiel 10

Multiplizieren Sie den folgenden Term aus!

$$(x - 2 + 2a)(x + 5 - a)$$

Lösung

Die oben erarbeitete Regel für die Multiplikation von Summen gilt auch dann, wenn in den Summentermen mehr als zwei Summanden stehen.

$$(x - 2 + 2a)(x + 5 - a) = x^2 + 5x - ax - 2x - 10 + 2a + 2ax + 10a - 2a^2$$

Beim Zusammenfassen und Ordnen ist darauf zu achten, dass die Variablenterme in alphabetischer Reihenfolge und mit dem größten Exponenten beginnend geordnet werden.

$$= -2a^2 + 12a + ax + x^2 + 3x - 10$$

Lehrbeispiel 11

Multiplizieren Sie aus und fassen zusammen!

$$(a + 1)(a - 2)(a + 3)$$

Lösung

Nach dem Assoziativgesetz der Multiplikation fasst man zunächst zwei der drei Faktoren zusammen und multipliziert diese aus.

$$[(a + 1)(a - 2)](a + 3) = [a^2 - 2a + a - 2](a + 3)$$

Wenn möglich – wie in der eckigen Klammer – werden vor der nächsten Multiplikation gleichnamige Terme addiert.

$$= [a^2 - a - 2](a + 3) = a^3 + 3a^2 - a^2 - 3a - 2a - 6 = a^3 + 2a^2 - 5a - 6$$

Das Distributivgesetz der Multiplikation $a(b + c) = ab + ac$ kann nicht nur in der vorliegenden Reihenfolge angewendet werden. In vielen Aufgabenstellungen (z.B. Kürzen bei Bruchtermen) ist es notwendig, vorhandene Summenterme in Produkte umzuwandeln. Dabei muss man nur das Distributivgesetz von rechts nach links lesen.

Lehrbeispiel 12

Zerlegen Sie die Summe mithilfe des Distributivgesetzes in ein Produkt!

$$5a + 5b$$

Lösung

Der erste Lösungsschritt besteht darin, dass die Summanden auf gemeinsame Faktoren überprüft werden.

$$\boxed{5}a + \boxed{5}b$$

Wenn ein solcher gemeinsamer Faktor gefunden wurde, wird dieser **ausgeklammert** und die jeweiligen „Reste“ der Summanden in eine Klammer geschrieben.

$$= \boxed{5}(a + b)$$

Diese „umgekehrte“ Anwendung des Distributivgesetzes nennt man **Ausklammern** oder **Faktorisieren**.

Lehrbeispiel 13

Verwandeln Sie in ein Produkt!

$$-28an + 21bn - 56np$$

Lösung

Zunächst scheinen die Koeffizienten keinen gemeinsamen Faktor zu haben. Zur genauen Überprüfung werden sie in Primfaktoren zerlegt:

$$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$$

$$21 = 3 \cdot 7$$

$$56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$$

$$\text{ggT}(28, 21, 56) = 7$$

Die Primfaktorzerlegung zeigt, dass der Faktor 7 in allen Koeffizienten vorkommt. Damit sieht der Summenterm wie folgt aus:

$$\begin{aligned} & -28an + 21bn - 56np \\ = & -4 \cdot 7 \cdot a \cdot n + 3 \cdot 7 \cdot b \cdot n - 8 \cdot 7 \cdot n \cdot p \end{aligned}$$

Bei der Überprüfung der Variablen wird deutlich, dass der Faktor n ebenfalls in allen Summanden vorkommt.

$$= -4 \cdot 7 \cdot a \cdot n + 3 \cdot 7 \cdot b \cdot n - 8 \cdot 7 \cdot n \cdot p$$

Somit ergibt sich als auszuklammernder Faktor 7n.

$$= \underline{7n(-4a + 3b - 8p)}$$

Lehrbeispiel 14

Verwandeln Sie die Summe in ein Produkt!

$$12a - 12$$

Lösung

In beiden Summanden steht die Zahl 12; sie wird also faktorisiert.

$$12a - 12 = 12a - 12 \cdot 1$$

Wichtig ist hier, dass beim zweiten Summanden unbedingt der Faktor 1 mitzudenken ist.

$$= 12(a - 1)$$

Würde die 1 in der Klammer vergessen, ergäbe sich beim Ausmultiplizieren nicht die ursprüngliche Summe.

Lehrbeispiel 15

Verwandeln Sie die Summe in ein Produkt, indem Sie den Faktor (-1) ausklammern!

$$-x - y$$

Lösung

In vielen Aufgabenstellungen ist es vorteilhaft, den Term so zu verändern, dass sich die Vorzeichen der Variablen ändern.

$$-x - y = (-1)(x + y)$$

Nun gibt es Summenterme, bei denen zunächst ein Faktorisieren nicht möglich erscheint. In der Summe $px + pz + qx + qz$ ist kein gemeinsamer Faktor aller vier Summanden zu erkennen. Bei genauerer Überprüfung ist aber festzustellen, dass in jeweils zwei Summanden ein gemeinsamer Faktor vorhanden ist.

$$px + pz + qx + qz$$

Im ersten Lösungsschritt wird also aus jeweils zwei Summanden ausgeklammert.

$$= p(x + z) + q(x + z)$$

Jetzt wird deutlich, dass die beiden verbleibenden Summanden wiederum einen gemeinsamen Faktor haben.

$$= p(x + z) + q(x + z)$$

Da dieser gemeinsame Faktor ein Klammerterm ist, wird die gesamte Klammer $(x + z)$ faktorisiert.

$$= (x + z)(p + q)$$

Lehrbeispiel 16

Verwandeln Sie in ein Produkt!

$$2ax + 8ay - bx - 4by$$

Lösung

$$2ax + 8ay - bx - 4by$$

$$= 2a(x + 4y) - b(x + 4y)$$

In der zweiten Klammer ist darauf zu achten, dass beim Ausmultiplizieren der ursprüngliche Term $-4by$ entsteht; in der Klammer muss der „Restterm“ $4y$ also mit einem Pluszeichen versehen werden.

Da beide Klammerterme wieder identisch sind, können diese faktorisiert werden.

$$= (x + 4y)(2a - b)$$

Lehrbeispiel 17

Überprüfen Sie, ob die gegebene Summe in ein Produkt zu verwandeln ist!

$$p^2 + 6pr + 8r^2$$

Lösung

Zur Überprüfung dieser Frage sind folgende Voraussetzungen zu formulieren:

1. Wenn diese Summe als Produkt zweier Summenterme entstanden ist, müssen die ersten Summanden beider Klammern gleich sein.

$$p^2 + 6pr + 8r^2 = (p \quad)(p \quad)$$

2. Die Variable des jeweils zweiten Summanden ist ebenfalls festgelegt.

$$= (p \quad r)(p \quad r)$$

3. Nach der Regel über das Multiplizieren von Summentermen muss gelten:

$$(p \quad a_1 r)(p \quad a_2 r) = p^2 + 6pr + 8r^2$$

Die beiden gleichnamigen Variablenterme pr müssen in ihrer **Summe +6pr** ergeben. Zugleich muss das **Produkt** der Koeffizienten der Variablen r $+8$ ergeben. Daraus ist zu folgern:

$$+6 = a_1 + a_2$$

$$+8 = a_1 \cdot a_2$$

Gesucht werden also zwei Zahlen, die in ihrer Summe $+6$ und als Produkt $+8$ ergeben.

Es gibt folgende Möglichkeiten:

$$\begin{array}{ll}
 +6 = 1 + 5 & +8 = 1 \cdot 8 \\
 = 2 + 4 & = 2 \cdot 4 \\
 = 3 + 3 & = (-1) \cdot (-8) \\
 & = (-2) \cdot (-4)
 \end{array}$$

Die Zahlenkombination $+6 = 2 + 4$ und $+8 = 2 \cdot 4$ erfüllt diese Voraussetzungen. Es ergibt sich als Lösung:

$$p^2 + 6pr + 8r^2 = \underline{(p + 2r)(p + 4r)}$$

Antwort: Der gegebene Summenterm lässt sich in ein Produkt umwandeln.

Lehrbeispiel 18

Faktorisieren Sie!

$$a^2 - ay - 6y^2$$

Lösung

$$1. \text{ Lösungsschritt: } a^2 - ay - 6y^2 = (a - y)(a + y)$$

$$\begin{array}{ll}
 2. \text{ Lösungsschritt: } -6 = (-1) \cdot 6 & \\
 = (-2) \cdot 3 & \\
 = 1 \cdot (-6) & -1 = 2 + (-3) \\
 = 2 \cdot (-3) &
 \end{array}$$

Das Zahlenpaar $+2/-3$ erfüllt beide Bedingungen.

$$a^2 - ay - 6y^2 = \underline{(a + 2y)(a - 3y)}$$

Das Faktorisieren von Summentermen wird besonders bei der Addition und Multiplikation von Bruchtermen benötigt.

Lehrbeispiel 19

Bestimmen Sie die Definitionsmenge!

Die Grundmenge ist $G = \mathbb{Q}$.

$$\frac{5}{4a - 8}$$

Lösung

Da der Nenner des Bruchterms eine Summe ist, muss dieser zunächst faktorisiert werden.

$$4a - 8 = 4a - 2 \cdot 4 = 4(a - 2)$$

Gesucht wird die Zahl, für deren Einsetzung in den Nennerterm dieser Null wird.

$$4(a - 2)$$

$$4(2 - 2) = 4 \cdot 0 = 0$$

Antwort: Definitionsmenge $D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$

Lehrbeispiel 20

Faktorisieren Sie den folgenden Term im Nenner und geben Sie die Definitionsmenge an!

$$\frac{25 - a}{a^2 - 19a}$$

Lösung

$$a^2 - 19a = a(a - 19)$$

In diesem Term ist folgende Regel zu beachten:

Ein Produkt aus zwei oder mehreren Faktoren (Termen) ist immer dann gleich Null, wenn mindestens einer der Faktoren (Terme) Null ist.

$$a(a - 19)$$

$$0(0 - 19) = 0 \cdot (-19) = 0$$

$$19(19 - 19) = 19 \cdot 0 = 0$$

Für zwei Einsetzungen wird der Nenner Null.

Antwort: $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 19\}$

Lehrbeispiel 21

Bestimmen Sie die Definitionsmenge!

$$\frac{5x}{(2x + 6)(x - 1)}$$

Lösung

$$(2x + 6)(x - 1) = 2(x + 3)(x - 1)$$

$$2(-3 + 3)(-3 - 1) = 2 \cdot 0 \cdot (-4) = 0$$

$$2(1 + 3)(1 - 1) = 2 \cdot 4 \cdot 0 = 0$$

Antwort: $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 1\}$

Für das Addieren und Subtrahieren von Bruchtermen ist das Erweitern und Kürzen ein wesentlicher Bestandteil. Aus diesem Grunde sollen dazu zunächst einige Beispiele erläutert werden.

Lehrbeispiel 22

Geben Sie die Definitionsmenge an und erweitern Sie den Bruchterm!

$$\frac{5}{2 + y} \quad \text{erweitert mit } y - 3$$

Lösung

Da beim Erweitern Zähler und Nenner mit dem selben Term multipliziert werden, darf auch der Term, mit dem erweitert wird, nicht die Zahl Null bezeichnen.

$$\begin{aligned} \frac{5(y - 3)}{(2 + y)(y - 3)} &= \frac{5y - 15}{2y - 6 + y^2 - 3y} \\ &= \frac{5y - 15}{y^2 - y - 6} \quad y \neq 3, y \neq -2 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 23

Kürzen Sie den Bruchterm!

$$\frac{5a - 35}{15a^2 - 105a}$$

Lösung

Bisher wurden nur Bruchterme behandelt, in denen keine Summen vorkamen. Im vorliegenden Beispiel bestehen Zähler und Nenner aus Summen. Hier ist folgende Regel zu beachten:

Aus Summen und Differenzen darf nicht gekürzt werden. Die Terme im Zähler und im Nenner müssen zunächst jeweils in Faktoren zerlegt werden.

$$\frac{5a - 35}{15a^2 - 105a} = \frac{5(a - 7)}{15a(a - 7)} \quad a \neq 7, a \neq 0$$

Erst wenn **im Zähler und im Nenner nur Faktoren** stehen, darf gekürzt werden. Auch hier gilt die Regel, dass beim Kürzen der Term, durch den gekürzt wird, nicht die Zahl Null bezeichnet.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{5(a-7)}}}{\underset{3}{\cancel{15a(a-7)}}} = \frac{1}{3a}$$

Lehrbeispiel 24

Kürzen Sie den Bruchterm!

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x^2-3x}$$

Lösung

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x^2-3x} = \frac{\overset{1}{\cancel{(x-3)}}(x+3)}{x\underset{1}{\cancel{(x-3)}}} \quad x \neq 0, x \neq 3$$

$$= \frac{x+3}{x}$$

Lehrbeispiel 25

Fassen Sie die Bruchterme zusammen!

$$\frac{10x}{x-1} + \frac{5}{2x}$$

Lösung

$$\frac{10x}{x-1} + \frac{5}{2x} \quad x \neq 1, x \neq 0$$

Zunächst muss der Hauptnenner bestimmt werden. Da beide Nenner nicht weiter zerlegt werden können, ist der Hauptnenner

$$\text{HN: } (x-1) \cdot 2x$$

Anschließend werden beide Bruchterme gleichnamig gemacht; d.h. erweitert und addiert.

$$\frac{10x \cdot 2x}{(x-1)2x} + \frac{5(x-1)}{(x-1)2x} = \frac{20x^2 + 5x - 5}{(x-1)2x}$$

Lehrbeispiel 26

Machen Sie gleichnamig und fassen Sie zusammen!

$$\frac{x-2}{2x(x+1)} - \frac{x-3}{4(x+1)}$$

Lösung

$$\frac{x-2}{2x(x+1)} - \frac{x-3}{4(x+1)} \quad x \neq 0, x \neq -1$$

$$2x(x+1) \quad 2 \cdot 2(x+1) \quad \text{HN: } 4x(x+1)$$

$$\frac{(x-2)2}{4x(x+1)} - \frac{(x-3)x}{4x(x+1)}$$

In diesem Lösungsschritt ist im Zähler des zweiten Bruches eine Klammer gesetzt worden, da es sich um eine Summe handelt, die mit dem Faktor x multipliziert wird.

$$\begin{aligned} \frac{2x-4-(x-3)x}{4x(x+1)} &= \frac{2x-4-x^2+3x}{4x(x+1)} \\ &= \frac{-x^2+5x-4}{4x(x+1)} \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 27

Fassen Sie die Bruchterme zusammen!

$$\frac{4a}{5x-20} + \frac{6a}{3x-12}$$

Lösung

Zunächst müssen die Nenner faktorisiert werden.

$$5x-20 = 5(x-4)$$

$$3x-12 = 3(x-4) \quad \text{HN: } 5 \cdot 3(x-4) = 15(x-4)$$

$$\begin{aligned} \frac{4a}{5x-20} + \frac{6a}{3x-12} &= \frac{4a \cdot 3}{15(x-4)} + \frac{6a \cdot 5}{15(x-4)} \\ &= \frac{12a + 30a}{15(x-4)} \\ &= \frac{42a}{15(x-4)} \\ &= \frac{14a}{5(x-4)} \quad x \neq 4 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 28

Fassen Sie zusammen!

$$\frac{4}{3x^2-4x} - \frac{2}{x^2+x}$$

Lösung

$$3x^2 - 4x = x(3x - 4)$$

$$x^2 + x = x(x + 1) \quad \text{HN: } x(3x - 4)(x + 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{x(3x - 4)} - \frac{2}{x(x + 1)} &= \frac{4(x + 1)}{x(3x - 4)(x + 1)} - \frac{2(3x - 4)}{x(3x - 4)(x + 1)} \\ &= \frac{4x + 4 - 6x + 8}{x(3x - 4)(x + 1)} \end{aligned}$$

Beachten Sie das Minuszeichen vor dem Bruchstrich!

$$\frac{-2x + 12}{x(3x - 4)(x + 1)} \quad x \neq -1, x \neq \frac{4}{3}, x \neq 0$$

Lehrbeispiel 29

Multiplizieren Sie die Bruchterme!

$$\frac{5y - 45}{x + 7} \cdot \frac{6x + 42}{y - 9}$$

Lösung

Da aus Summen und Differenzen nicht gekürzt werden darf, müssen die Zähler beider Bruchterme zunächst faktorisiert werden. Erst dann können **vollständige Summen** gekürzt werden.

$$\begin{aligned} \frac{5y - 45}{x + 7} \cdot \frac{6x + 42}{y - 9} &= \frac{5(y - 9)}{x + 7} \cdot \frac{6(x + 7)}{y - 9} \\ &= \frac{5\cancel{(y - 9)}^1 \cdot 6\cancel{(x + 7)}^1}{\cancel{(x + 7)}_1 \cdot \cancel{(y - 9)}_1} \quad x \neq -7, y \neq 9 \\ &= 30 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 30

Dividieren Sie die folgenden Terme!

$$\frac{-36 - 18y}{-5x - 5y} : \frac{-6 - 3y}{-x - y}$$

Lösung

$$\begin{aligned} \frac{-36 - 18y}{-5x - 5y} : \frac{-6 - 3y}{-x - y} &= \frac{-36 - 18y}{-5x - 5y} \cdot \frac{-x - y}{-6 - 3y} \\ &= \frac{(-36 - 18y)(-x - y)}{(-5x - 5y)(-6 - 3y)} \end{aligned}$$

Wenn die Summenterme auf einen gemeinsamen Bruchstrich geschrieben werden, müssen unbedingt Klammern gesetzt werden.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-18(2+y) \cdot (-1)(x+y)}{-5(x+y) \cdot (-3)(2+y)} \\
 &= \frac{6}{5} \quad x \neq -y, y \neq -2
 \end{aligned}$$

3.4 Binomische Formeln

Die 1. binomische Formel

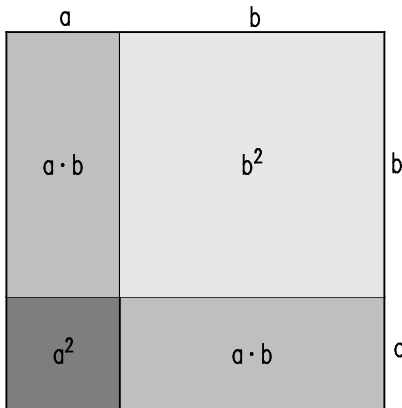


Abbildung 3 Zerlegung eines Quadrates

Mit dem Term $(a + b) (a + b)$ kann der Flächeninhalt des gesamten Quadrats mit der Seitenlänge $(a + b)$ berechnet werden.

Wie aus der Abbildung 3 zu erkennen ist, lässt sich das gesamte Quadrat in vier Teilflächen zerlegen:

$$a^2 + ab + ab + b^2$$

Die beiden mittleren Terme lassen sich zu einem Term zusammenfassen, sodass folgender Lösungsterm für die 1. binomische Formel entsteht:

$$\begin{aligned}
 (a + b) (a + b) &= (a + b)^2 \\
 &= a^2 + 2ab + b^2
 \end{aligned}$$

1. binomische Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(a + 5)^2 = a^2 + 10a + 25$$

Lehrbeispiel 1

Wenden Sie die 1. binomische Formel an!

$$(15r + 3s)^2$$

Lösung

$$\begin{aligned}
 (15r + 3s)^2 &= 15r \cdot 15r + 2 \cdot 15r \cdot 3s + 3s \cdot 3s \\
 &= \underline{225r^2 + 90rs + 9s^2}
 \end{aligned}$$

Oft ist es notwendig, eine gegebene Summe in ein Produkt zu verwandeln (Faktorisieren).

Lehrbeispiel 2

Schreiben Sie als Produkt, indem Sie die 1. binomische Formel anwenden!

$$a^2 + 8a + 16$$

Lösung

$$\begin{array}{ccccccc}
 a^2 & + & 8a & + & 16 & = & (\square + \square)^2 \\
 \text{Quadrat des 1. Gliedes} & & \text{Doppeltes Produkt des 1. und 2. Gliedes} & & \text{Quadrat des 2. Gliedes} & &
 \end{array}$$

Aus dem Quadrat (a^2) erhält man a als erstes Glied, aus dem Quadrat 16 erhält man 4 als zweites Glied. Zur Kontrolle bildet man abschließend den mittleren Term $8a = 2 \cdot a \cdot 4$. Als Lösung ergibt sich somit:

$$a^2 + 8a + 16 = (a + 4)^2$$

Die 2. binomische Formel

Für die Multiplikation von zwei Summentermen gilt die Regel, dass jeder Summand der 1. Klammer mit jedem Summanden der 2. Klammer multipliziert wird.

Dann ergibt sich für die Multiplikation von:

$$\begin{aligned}
 (a - b)(a - b) &= (a - b)^2 \\
 &= a^2 - ab - ab + b^2 \\
 &= a^2 - 2ab + b^2
 \end{aligned}$$

2. binomische Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(r - s)^2 = r^2 - 2rs + s^2$$

$$(8 - y)^2 = 64 - 16y + y^2$$

Lehrbeispiel 3

Wenden Sie die 2. binomische Formel an!

$$(4t - 3v)^2$$

Lösung

$$\begin{aligned}
 &(4t - 3v)^2 \\
 &= 4t \cdot 4t - 2 \cdot 4t \cdot 3v + 3v \cdot 3v \\
 &= \underline{16t^2 - 24tv + 9v^2}
 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 4

Schreiben Sie als Produkt, indem Sie die 2. binomische Formel anwenden!

$$u^2 - 12u + 36$$

Lösung

$$u^2 - 12u + 36 = (\square - \square)^2$$

Diese Aufgabe wird analog zur 1. binomischen Formel gelöst; d.h. aus dem Quadrat u^2 erhält man das erste Glied u , aus dem Quadrat 36 das zweite Glied 6. Die Kontrolle des mittleren Gliedes ergibt $12u = 2 \cdot u \cdot 6$.

Als Lösung ergibt sich somit:

$$u^2 - 12u + 36 = (u - 6)^2$$

Die 3. binomische Formel

Die dritte binomische Formel behandelt den Sonderfall, dass sich die beiden Klammern durch das Vorzeichen unterscheiden.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2$$

Die beiden mittleren Terme ergeben zusammen Null, sodass folgender Lösungsterm für die 3. binomische Formel entsteht:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

3. binomische Formel

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(m + n)(m - n) = m^2 - n^2$$

$$(4a + 5c)(4a - 5c) = 16a^2 - 25c^2$$

Lehrbeispiel 5

Wenden Sie die 3. binomische Formel an!

$$(3x + 5y)(3x - 5y)$$

Lösung

$$(3x + 5y)(3x - 5y) = 3x \cdot 3x - 5y \cdot 5y \\ = \underline{\underline{9x^2 - 25y^2}}$$

Lehrbeispiel 6

Schreiben Sie als Produkt, indem Sie die 3. binomische Formel anwenden!

$$4 - a^2$$

Lösung

$$4 - a^2 = (\square + \square) (\square - \square)$$

Aus dem Quadrat 4 erhält man das erste Glied 2, aus dem Quadrat a^2 erhält man das zweite Glied a . Als Lösung ergibt sich somit:

$$4 - a^2 = (2 + a) (2 - a)$$

Da die drei binomischen Formeln in vielen Aufgaben mit anderen Termen kombiniert sind, ist ein systematischer und geordneter Lösungsweg sehr wichtig.

Lehrbeispiel 7

Berechnen Sie und fassen so weit wie möglich zusammen!

$$(-4a - 7)^2 - (2a + 4)^2$$

Lösung

Im ersten Lösungsschritt werden ausschließlich die beiden binomischen Formeln angewendet, ohne das Minuszeichen vor der zweiten Klammer zu berücksichtigen. Die erste Klammer ist das 2. Binom:

$$(-4a)(-4a) - 2(-4a)7 + (-7)(-7) = 16a^2 + 56a + 49$$

Die zweite Klammer ist das 1. Binom:

$$2a \cdot 2a + 2 \cdot 2a \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 4a^2 + 16a + 16$$

Dann ergibt sich als Zwischenlösung:

$$16a^2 + 56a + 49 - (4a^2 + 16a + 16)$$

Im zweiten Lösungsschritt wird die Minusklammer aufgelöst, indem alle Vorzeichen in der Klammer geändert werden:

$$16a^2 + 56a + 49 - 4a^2 - 16a - 16$$

Abschließend werden **gleichartige Terme zusammengefasst**:

$$(-4a - 7)^2 - (2a + 4)^2 = \underline{12a^2 + 40a + 33}$$

Lehrbeispiel 8

Berechnen Sie und fassen Sie so weit wie möglich zusammen!

$$-[48xz - (4x - 6z)^2] - [(4x - 6z)(4x + 6z)]$$

Lösung

Im ersten Lösungsschritt werden nur die Terme innerhalb der runden Klammern mithilfe der binomischen Formeln ausgerechnet.

$$-[48xz - (16x^2 - 48xz + 36z^2)] - [16x^2 - 36z^2]$$

Im **zweiten Lösungsschritt** wird die verbleibende runde Klammer aufgelöst .

$$-[48xz - 16x^2 + 48xz - 36z^2] - [16x^2 - 36z^2]$$

Im **dritten Lösungsschritt** werden die eckigen Klammern aufgelöst (vor beiden Klammern steht ein Minuszeichen!).

$$-48xz + 16x^2 - 48xz + 36z^2 - 16x^2 + 36z^2$$

Nach dem **Zusammenfassen gleichartiger Terme** ergibt sich als Lösung:

$$[48xz - (4x - 6z)^2] - [(4x - 6z)(4x + 6z)] = \underline{\underline{72z^2 - 96xz}}$$

Lehrbeispiel 9

Machen Sie gleichnamig und fassen Sie zusammen!

$$\frac{1}{a^2 - 4} - \frac{1}{a + 2}$$

Lösung

$$a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2) \quad \text{HN: } (a + 2)(a - 2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 - 4} - \frac{1}{a + 2} &= \frac{1}{(a + 2)(a - 2)} - \frac{1(a - 2)}{(a + 2)(a - 2)} \\ &= \frac{1 - a + 2}{(a + 2)(a - 2)} \\ &= \frac{-a + 3}{(a + 2)(a - 2)} \quad a \neq 2, a \neq -2 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 10

Fassen Sie zusammen!

$$\frac{2}{x^2 - 9} - \frac{2}{x^2 - 6x + 9}$$

Lösung

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= (x + 3)(x - 3) \\ x^2 - 6x + 9 &= (x - 3)^2 \quad \text{HN: } (x + 3)(x - 3)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{(x + 3)(x - 3)} - \frac{2}{(x - 3)^2} &= \frac{2(x - 3) - 2(x + 3)}{(x + 3)(x - 3)^2} \\ &= \frac{2x - 6 - 2x - 6}{(x + 3)(x - 3)^2} \\ &= \frac{-12}{(x + 3)(x - 3)^2} \quad x \neq -3, x \neq 3 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 11

Dividieren Sie die Terme! Faktorisieren Sie und kürzen so weit wie möglich!

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2}{4(a - 2b)^2} : \frac{x^2 - y^2}{a^2 - 4ab + 4b^2}$$

Lösung

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4(a - 2b)^2} : \frac{x^2 - y^2}{a^2 - 4ab + 4b^2} &= \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4(a - 2b)^2} \cdot \frac{a^2 - 4ab + 4b^2}{x^2 - y^2} \\ &= \frac{(x + y)^2 (a - 2b)^2}{4(a - 2b)^2 (x + y)(x - y)} \\ &= \frac{x + y}{4(x - y)} \quad a \neq 2b, x \neq y, x \neq -y \end{aligned}$$

3.5 Polynomdivision

Die Polynomdivision ist prinzipiell ein mathematisches Verfahren zum Lösen von Gleichungen höheren Grades. An dieser Stelle wird zunächst das Verfahren zum Dividieren von Polynomen vom Grad n mit einem Term ersten Grades vorgestellt.

$$(ax^n + bx^{n-1} + \dots + cx + d) : (x - e)$$

Mit dem Ergebnis der Division kann das Polynom faktorisiert werden, wodurch sich der Grad des Polynoms um eine Potenz reduziert. Mit dieser Faktorisierung kann in der Regel einfacher weitergerechnet werden.

Mithilfe des folgenden Beispiels wird die Vorgehensweise erläutert.

Durch Ausmultiplizieren der zwei Summenterme

$$\begin{aligned} (3x + 5)(2x - 6) &= 6x^2 - 18x + 10x - 30 \\ &= \underline{6x^2 - 8x - 30} \end{aligned}$$

ergibt sich ein Summenterm, der **Polynom** genannt wird.

Soll nun wieder aus diesem Polynom durch Faktorisieren ein Produkt hergestellt werden, ist dies nicht so einfach möglich wie bei den Binomen. Ist aber bereits ein Teil des Produktes bekannt, lässt sich durch eine **Polynomdivision** der zweite Faktor berechnen.

Beispiel:

$$(6x^2 - 8x - 30) : (2x - 6) = 3x + 5$$

$$6x^2 : 2x = \boxed{3x}$$

$$\begin{array}{r} 6x^2 - 8x - 30 \\ -(6x^2 - 18x) \\ \hline 0 + 10x - 30 \end{array}$$

$$10x : 2x = \boxed{5}$$

$$\begin{array}{r} 10x - 30 \\ -(10x - 30) \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

Der **erste Lösungsschritt** erfolgt ähnlich wie bei der gewöhnlichen Division; es wird allerdings nur **durch den 1. Summanden des Divisors dividiert**:

Der Quotient $3x$ wird mit dem gesamten Divisor multipliziert, unter den Dividenten geschrieben und subtrahiert:

Der „Rest“ von $10x$ wird nun wieder durch den ersten Summanden des Divisors dividiert:

Das Ergebnis 5 wird wiederum mit dem gesamten Divisor multipliziert; anschließend wird erneut die Differenz gebildet:

Als Lösung ergibt sich somit: $(6x^2 - 8x - 30) : (2x - 6) = \underline{3x + 5}$

Lehrbeispiel 1

Führen Sie die Polynomdivision in zwei Schritten durch, indem Sie das Polynom

$$(x^3 + 4x^2 + x - 6)$$

zunächst durch den Term $(x-1)$ dividieren und anschließend das Ergebnis durch $(x+2)$ dividieren!

Lösung

Erste Division:

$$(x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x - 1) = x^2 + 5x + 6$$

$$\begin{array}{r} -(x^3 - x^2) \\ \hline 0 \quad 5x^2 + x - 6 \\ -(5x^2 - 5x) \\ \hline 0 \quad 6x - 6 \\ -(6x - 6) \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

daraus ergibt sich: $x^3 + 4x^2 + x - 6 = \underline{(x - 1)(x^2 + 5x + 6)}$

Zweite Division:

$$(x^2 + 5x + 6) : (x + 2) = x + 3$$

$$\begin{array}{r} -(x^2 + 2x) \\ \hline 0 \quad 3x + 6 \\ -(3x + 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

Eine vollständige Faktorisierung des Polynoms ergibt also:

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = \underline{(x - 1)(x + 2)(x + 3)}$$

Aufgaben
Aufgabe 1

Berechnen Sie!

1.1 $(+63) + (+37)$

1.2 $(-27) + (+15)$

1.3 $(+87) + (-37)$

1.4 $(+32) - (+28)$

1.5 $(-43) - (+71)$

1.6 $(-17) - (-34)$

Aufgabe 2

Vereinfachen und berechnen Sie!

2.1 $(-13) - (-12)$

2.2 $(-79) - (+95)$

2.3 $(+55) - (+25)$

Aufgabe 3

Fassen Sie zusammen! Bestimmen Sie zunächst die Definitionsmenge!

3.1 $\frac{5a}{7x} + \frac{3a}{7x}$

3.2 $\frac{4x+1}{a+3} - \frac{7+2x}{a+3}$

3.3 $\frac{9}{x} + \frac{11}{y}$

3.4 $\frac{12m}{9c} + \frac{8m}{6c}$

3.5 $3 - \frac{2x}{3y}$

3.6 $\frac{5}{x-2} - \frac{3}{x-1}$

3.7 $\frac{4+7a}{9-3x} + \frac{7-a}{6-2x}$

3.8 $\frac{8}{2p^2 - p} + \frac{14p}{4p + 6}$

Aufgabe 4

Berechnen Sie! Bestimmen Sie zunächst die Definitionsmenge!

4.1 $\frac{2ab}{21c} \cdot \frac{3c}{4a}$

4.2 $\frac{10}{3x^2} \cdot xy$

$$4.3 \quad \frac{9-x}{4x-32} \cdot \frac{2x-16}{9-x}$$

$$4.4 \quad \frac{x^2(x-y)}{a-b} \cdot \frac{3a-3b}{2x-2y}$$

Aufgabe 5

Berechnen Sie! Bestimmen Sie zunächst die Definitionsmenge!

$$5.1 \quad \frac{1+c}{c^2} : \frac{15}{7c}$$

$$5.2 \quad \frac{t}{5-s} : 3st$$

$$5.3 \quad \frac{21p+28}{8a-8x} : \frac{27p+36}{12a-12x}$$

$$5.4 \quad \frac{3x-6}{16x} : \frac{x^2-2x}{8ax}$$

Aufgabe 6

Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen!

$$6.1 \quad 10ab - (20a + 12b) - 2(3ab + a) + 5ab$$

$$6.2 \quad 1\frac{1}{2}x - [-11\frac{1}{6}y - \frac{1}{2}x - (5\frac{1}{3}y + 1,5x) - y]$$

$$6.3 \quad 3a - \{-[-16b - (17,5a - 2,5b)] - (4a + 0,3b)\}$$

Aufgabe 7

Faktorisieren Sie!

$$7.1 \quad 6ax + 4bx + 9ay + 6by$$

$$7.2 \quad x^2 + 2xy - 35y^2$$

Aufgabe 8

Wenden Sie die binomischen Formeln an!

$$8.1 \quad (15 + s)^2$$

$$8.2 \quad (a - 9b)^2$$

$$8.3 \quad (n + 8)(n - 8)$$

Aufgabe 9

Schreiben Sie als Produkt, indem Sie die binomischen Formeln anwenden!

$$9.1 \quad 81 + 18m + m^2$$

$$9.2 \quad 49 - 14x + x^2$$

$$9.3 \quad 64r^2 - 121s^2$$

Aufgabe 10

Vereinfachen Sie!

$$10.1 \quad -4a + (8 - 4a)^2$$

$$10.2 \quad x^2 - (x - y)^2 + 2xy$$

$$10.3 \quad (6x + 4y)^2 - (4y - 6x)^2 + 36x^2 + 16y^2$$

$$10.4 \quad 12a^2 - [(4a - 2b)(4a + 2b)] + 4b^2$$

$$10.5 \quad -[9x^2 - (5x - 4y)^2 - 16xy] - (4x + 3y)^2 - 6y^2$$

Aufgabe 11

Fassen Sie zusammen! Bestimmen Sie zunächst die Definitionsmenge!

$$11.1 \quad \frac{y}{y-1} - \frac{y}{4y^2-4}$$

$$11.2 \quad \frac{4x}{3-x} + \frac{18x}{3+x} - \frac{5x}{9-x^2}$$

$$11.3 \quad \frac{8}{25-a^2} - \frac{9}{5+a} - \frac{8}{a-5}$$

Aufgabe 12

Dividieren Sie die Terme! Bestimmen Sie zunächst die Definitionsmenge!

$$12.1 \quad (x^2 - 4x - 21) : (x + 3)$$

$$12.2 \quad (x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}) : (x - \frac{1}{4})$$

Aufgabe 13

Zerlegen Sie die folgenden Polynome vollständig in ein Produkt, indem Sie nacheinander Polynomdivisionen durch die angegebenen Faktoren durchführen! Bestimmen Sie die Definitionsmenge!

$$13.1 \quad x^3 + 10x^2 + 7x - 18 \quad (x - 1), (x + 2)$$

$$13.2 \quad x^3 + 5x^2 - 22x - 56 \quad (x - 4), (x + 7)$$

$$13.3 \quad 2x^3 + 4,8x^2 + 1,5x - 0,2 \quad (x + 2), (2x + 1)$$

$$13.4 \quad 4x^3 - 3x - 1 \quad (x - 1), (x + 0,5)$$

$$13.5 \quad 10x^3 - 23x^2y - 12xy^2 + 36y^3 \quad (2x - 3y), (x - 2y)$$

Lösungsanhang**Lösungen****1 Mathematische Zahlendarstellungen****Aufgabe 1.1**

$$3,1505 \approx 3,15$$

Aufgabe 1.2

$$19,67 \approx 19,7$$

Aufgabe 1.3

$$1250,0 \approx 1300$$

Aufgabe 1.4

$$875,5 \approx 880$$

Aufgabe 2.1

$$\begin{aligned} 8,5441 + 25,489 + 0,75 \\ 8,54 + 25,49 + 0,75 = 34,78 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.2

$$\begin{aligned} 33,567 - 9,8 \\ 33,6 - 9,8 = 23,8 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.1

$$\begin{aligned} 47,93 \cdot 3,5 \\ 48 \cdot 3,5 = 168 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.2

$$\begin{aligned} 65,2 : 0,38 \\ 65 : 0,38 \approx 171 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.1

$$5\,000\,000 = 5 \cdot 10^6$$

Aufgabe 4.2

$$1\,230\,000\,000 = 1,23 \cdot 10^9$$

Aufgabe 4.3

$$9\,184\,530 = 9,18453 \cdot 10^6$$

Aufgabe 5.1

$$250\text{ KW} = 2,5 \cdot 10^5\text{ W}$$

Aufgabe 5.2

$$7\text{ GW} = 7 \cdot 10^9\text{ W}$$

Aufgabe 5.3

$$800\text{ km} = 8 \cdot 10^5\text{ m}$$

Aufgabe 6.1

$$510\text{ Billionen m}^2 = 5,1 \cdot 10^{14}\text{ m}^2$$

Aufgabe 6.2

$$1083\text{ Trillionen m}^3 = 1,083 \cdot 10^{21}\text{ m}^3$$

Aufgabe 7.1

$$0,000\,7 = 7 \cdot 10^{-4}$$

Aufgabe 7.2

$$0,000\,000\,72 = 7,2 \cdot 10^{-7}$$

Aufgabe 7.3

$$0,000\,001 = 1 \cdot 10^{-6}$$

Aufgabe 8.1

$$12\text{ }\mu\text{m} = 1,2 \cdot 10^{-5}\text{ m}$$

Aufgabe 8.2

$$1280\text{ nm} = 1,28 \cdot 10^{-6}\text{ m}$$

Aufgabe 8.3

$$500\text{ pF} = 5 \cdot 10^{-10}\text{ F}$$

Aufgabe 9.1

$$8 \mu\text{m} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Aufgabe 9.2

$$250 \text{ nm} = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Aufgabe 10.1

$$\begin{aligned} 88 &= 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ &= (1011000)_2 \end{aligned}$$

Aufgabe 10.2

$$\begin{aligned} 429 &= 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= (110101101)_2 \end{aligned}$$

Aufgabe 10.3

$$901 = (1110000101)_2$$

Aufgabe 11.1

$$10010 + 10101 = 100111$$

$$18 + 21 = 39$$

Aufgabe 11.2

$$1111111 + 1100 = 10001011$$

$$127 + 12 = 139$$

Aufgabe 12.1

$$10 \cdot 100 = 1000$$

$$2 \cdot 4 = 8$$

Aufgabe 12.2

$$100101 \cdot 11001 = 1110011101$$

$$37 \cdot 25 = 925$$

2 Zahlenmengen**Aufgabe 1.1**

$$8 \in \mathbb{N}, 8 \in \mathbb{Z}, 8 \in \mathbb{Q}_+, 8 \in \mathbb{Q}$$

Aufgabe 1.2

$$-6 \in \mathbb{Z}, -6 \in \mathbb{Q}_-, -6 \in \mathbb{Q}$$

Aufgabe 1.3

$$12\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}_+, 12\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$$

Aufgabe 1.4

$$-10,5 \in \mathbb{Q}_-, -10,5 \in \mathbb{Q}$$

Aufgabe 1.5

$$8,1 \in \mathbb{Q}_+, 8,1 \in \mathbb{Q}$$

Aufgabe 1.6

$$-20 \in \mathbb{Z}, -20 \in \mathbb{Q}_-, -20 \in \mathbb{Q}$$

Aufgabe 1.7

$$100 \in \mathbb{N}, 100 \in \mathbb{Z}, 100 \in \mathbb{Q}_+, 100 \in \mathbb{Q}$$

Aufgabe 2.1

$$3 < 5$$

Aufgabe 2.2

$$7 > -8$$

Aufgabe 2.3

$$-2\frac{1}{2} > -5$$

Aufgabe 2.4

$$20,01 > -21$$

Aufgabe 2.5

$$-1 < 1$$

Aufgabe 2.6

$$-9 = -9$$

Aufgabe 3.1

Gegenzahl +15 $|-15| = 15$

Aufgabe 3.2

Gegenzahl -3,4 $|-3,4| = 3,4$

Aufgabe 3.3

Gegenzahl $+4\frac{1}{2}$ $\left|-4\frac{1}{2}\right| = 4\frac{1}{2}$

Aufgabe 3.4

Gegenzahl +8,35 $|-8,35| = 8,35$

Aufgabe 4.1

$$7^2 = 49$$

Aufgabe 4.2

$$(-2)^2 = 4$$

Aufgabe 4.3

$$(-0,4)^2 = 0,16$$

Aufgabe 4.4

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

Aufgabe 4.5

$$(-1,2)^2 = 1,44$$

Aufgabe 5.1

$$\sqrt{144} = 12$$

Aufgabe 5.2

$$\sqrt{1} = 1$$

Aufgabe 5.3

$$\sqrt{3,24} = 1,8$$

Aufgabe 5.4

$$\sqrt{0,81} = 0,9$$

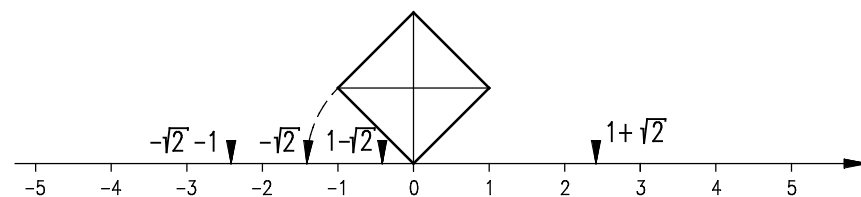
Aufgabe 5.5

$$\sqrt{0,0049} = 0,07$$

Aufgabe 6

$$\begin{array}{ll} 1^2 \leq 3 \leq 2^2 & 1 \leq \sqrt{3} \leq 2 \\ 1,7^2 \leq 3 \leq 1,8^2 & 1,7 \leq \sqrt{3} \leq 1,8 \\ 1,73^2 \leq 3 \leq 1,74^2 & 1,73 \leq \sqrt{3} \leq 1,74 \end{array}$$

Aufgabe 7



$$-\sqrt{2} - 1 < -\sqrt{2} < 1 - \sqrt{2} < 1 + \sqrt{2}$$

Aufgabe 8.1

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{64} = 8$$

Aufgabe 8.2

$$\sqrt{50} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{400} = 20$$

Aufgabe 8.3

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{24,5} = \sqrt{49} = 7$$

Aufgabe 9.1

$$\sqrt{128} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{64} = 8\sqrt{2}$$

Aufgabe 9.2

$$\sqrt{1210} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{10} = 11\sqrt{10}$$

Aufgabe 9.3

$$\sqrt{245} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{5} = 7\sqrt{5}$$

Aufgabe 10.1

$$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{9} = 3$$

Aufgabe 10.2

$$\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}} = \sqrt{49} = 7$$

Aufgabe 10.3

$$\frac{\sqrt{2,45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{0,49} = 0,7$$

Aufgabe 11.1

$$4\sqrt{5} + 7\sqrt{3}$$

Aufgabe 11.2

$$16\sqrt{6} + 5\sqrt{7}$$

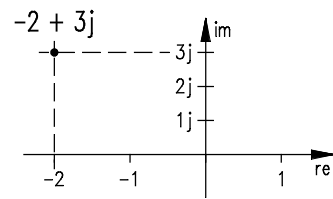
Aufgabe 12.1

$$\frac{5\sqrt{3}}{15} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

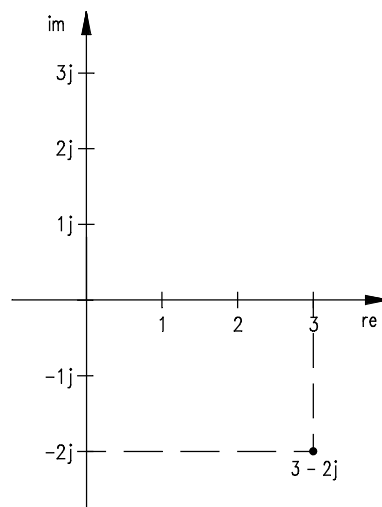
Aufgabe 12.2

$$\frac{3\sqrt{2}\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$$

Aufgabe 13.1



Aufgabe 13.2



3 Grundrechenarten

Aufgabe 1.1

$$(+63) + (+37) = +100$$

Aufgabe 1.2

$$(-27) + (+15) = -12$$

Aufgabe 1.3

$$(+87) + (-37) = +50$$

Aufgabe 1.4

$$(+32) - (+28) = +4$$

Aufgabe 1.5

$$(-43) - (+71) = -114$$

Aufgabe 1.6

$$(-17) - (-34) = +17$$

Aufgabe 2.1

$$(-13) - (-12) = -13 + 12 = -1$$

Aufgabe 2.2

$$(-79) - (+95) = -79 - 95 = -174$$

Aufgabe 2.3

$$(+55) - (+25) = +55 - 25 = +30$$

Aufgabe 3.1

$$\frac{5a}{7x} + \frac{3a}{7x} = \frac{8a}{7x} \quad x \neq 0$$

Aufgabe 3.2

$$\frac{4x+1}{a+3} - \frac{7+2x}{a+3} = \frac{2x-6}{a+3} \quad a \neq -3$$

Aufgabe 3.3

$$\frac{9}{x} + \frac{11}{y} = \frac{9y+11x}{xy} \quad x \neq 0, y \neq 0$$

Aufgabe 3.4

$$\frac{12m}{9c} + \frac{8m}{6c} = \frac{8m}{3c} \quad c \neq 0$$

Aufgabe 3.5

$$3 - \frac{2x}{3y} = \frac{9y-2x}{3y} \quad y \neq 0$$

Aufgabe 3.6

$$\frac{5}{x-2} - \frac{3}{x-1} = \frac{5(x-1) - 3(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{2x+1}{(x-2)(x-1)} \quad x \neq 2, x \neq 1$$

Aufgabe 3.7

$$\frac{4+7a}{9-3x} + \frac{7-a}{6-2x} = \frac{4+7a}{3(3-x)} + \frac{7-a}{2(3-x)} = \frac{11a+29}{6(3-x)} \quad x \neq 3$$

Aufgabe 3.8

$$\frac{8}{2p^2-p} + \frac{14p}{4p+6} = \frac{8}{p(2p-1)} + \frac{14p}{2(2p+3)} = \frac{28p^3 - 14p^2 + 32p + 48}{2p(2p-1)(2p+3)} \quad p \neq \frac{-3}{2}, p \neq 0, p \neq \frac{1}{2}$$

Aufgabe 4.1

$$\frac{\overset{1}{2} \overset{1}{a} b}{\underset{2}{2} \underset{2}{a} \underset{2}{4} \underset{2}{a}} \cdot \frac{\overset{1}{3} c}{\underset{2}{2} \underset{2}{4} \underset{2}{a}} = \frac{b}{14} \quad a \neq 0, c \neq 0$$

Aufgabe 4.2

$$\frac{10}{3x^2} \cdot xy = \frac{10y}{3x} \quad x \neq 0$$

Aufgabe 4.3

$$\frac{9-x}{4x-32} \cdot \frac{2x-16}{9-x} = \frac{1}{2} \quad x \neq 9, x \neq 8$$

Aufgabe 4.4

$$\frac{x^2(x-y)}{a-b} \cdot \frac{3a-3b}{2x-2y} = \frac{3x^2}{2} \quad a \neq b, x \neq y$$

Aufgabe 5.1

$$\frac{1+c}{c^2} : \frac{15}{7c} = \frac{(1+c) \cdot 7c}{c^2 \cdot 15} = \frac{7(c+1)}{15c} \quad c \neq 0$$

Aufgabe 5.2

$$\frac{t}{5-s} : 3st = \frac{1}{3s(5-s)} \quad s \neq 5, s \neq 0$$

Aufgabe 5.3

$$\frac{21p + 28}{8a - 8x} : \frac{27p + 36}{12a - 12x} = \frac{7}{6} \quad a \neq x, p \neq -\frac{4}{3}$$

Aufgabe 5.4

$$\frac{3x - 6}{16x} : \frac{x^2 - 2x}{8ax} = \frac{3a}{2x} \quad x \neq 0, x \neq 2$$

Aufgabe 6.1

$$10ab - (20a + 12b) - 2(3ab + a) + 5ab = -22a + 9ab - 12b$$

Aufgabe 6.2

$$1\frac{1}{2}x - [-11\frac{1}{6}y - \frac{1}{2}x - (5\frac{1}{3}y + 1,5x) - y] = 3,5x + 17,5y$$

Aufgabe 6.3

$$3a - \{-[-16b - (17,5a - 2,5b)] - (4a + 0,3b)\} = -10,5a - 13,2b$$

Aufgabe 7.1

$$6ax + 4bx + 9ay + 6by = (3a + 2b)(2x + 3y)$$

Aufgabe 7.2

$$x^2 + 2xy - 35y^2 = (x + 7y)(x - 5y)$$

Aufgabe 8.1

$$(15 + s)^2 = 225 + 30s + s^2$$

Aufgabe 8.2

$$(a - 9b)^2 = a^2 - 18ab + 81b^2$$

Aufgabe 8.3

$$(n + 8)(n - 8) = n^2 - 64$$

Aufgabe 9.1

$$81 + 18m + m^2 = (9 + m)^2$$

Aufgabe 9.2

$$49 - 14x + x^2 = (7 - x)^2$$

Aufgabe 9.3

$$64r^2 - 121s^2 = (8r + 11s)(8r - 11s)$$

Aufgabe 10.1

$$-4a + (8 - 4a)^2 = 16a^2 - 68a + 64$$

Aufgabe 10.2

$$x^2 - (x - y)^2 + 2xy = 4xy - y^2$$

Aufgabe 10.3

$$(6x + 4y)^2 - (4y - 6x)^2 + 36x^2 + 16y^2 = 36x^2 + 96xy + 16y^2$$

Aufgabe 10.4

$$12a^2 - [(4a - 2b)(4a + 2b)] + 4b^2 = -4(a^2 - 2b^2)$$

Aufgabe 10.5

$$-[9x^2 - (5x - 4y)^2 - 16xy] - (4x + 3y)^2 - 6y^2 = y^2 - 48xy$$

Aufgabe 11.1

$$\frac{y}{y-1} - \frac{y}{4y^2-4} = \frac{4y^2+3y}{4(y+1)(y-1)} \quad y \neq 1, y \neq -1$$

Aufgabe 11.2

$$\frac{4x}{3-x} + \frac{18x}{3+x} - \frac{5x}{9-x^2} = \frac{-14x^2+61x}{(3+x)(3-x)} \quad x \neq -3, x \neq 3$$

Aufgabe 11.3

$$\frac{8}{25-a^2} - \frac{9}{5+a} - \frac{8}{a-5} = \frac{8}{(5+a)(5-a)} - \frac{9}{5+a} + \frac{8}{5-a} = \frac{17a+3}{(5+a)(5-a)} \quad a \neq -5, a \neq 5$$

Aufgabe 12.1

$$(x^2 - 4x - 21) : (x + 3) = x - 7 \quad x \neq -3$$

Aufgabe 12.2

$$\left(x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}\right) : \left(x - \frac{1}{4}\right) = x - \frac{1}{2} \quad x \neq \frac{1}{4}$$

Aufgabe 13.1

$$(x^3 + 10x^2 + 7x - 18) : (x - 1) = x^2 + 11x + 18$$

$$(x^2 + 11x + 18) : (x + 2) = x + 9$$

$$(x^3 + 10x^2 + 7x - 18) = \underline{(x - 1)(x + 2)(x + 9)} \quad x \neq 1, x \neq -2$$

Aufgabe 13.2

$$(x^3 + 5x^2 - 22x - 56) : (x - 4) = x^2 + 9x + 14$$

$$(x^2 + 9x + 14) : (x + 7) = x + 2$$

$$(x^3 + 5x^2 - 22x - 56) = \underline{(x - 4)(x + 7)(x + 2)} \quad x \neq 4, x \neq -7$$

Aufgabe 13.3

$$(2x^3 + 4,8x^2 + 1,5x - 0,2) : (x + 2) = 2x^2 + 0,8x - 0,1$$

$$(2x^2 + 0,8x - 0,1) : (2x + 1) = x - 0,1$$

$$(2x^3 + 4,8x^2 + 1,5x - 0,2) = \underline{(x + 2)(2x + 1)(x - 0,1)} \quad x \neq -2, x \neq -0,5$$

Aufgabe 13.4

$$(4x^3 - 3x - 1) : (x - 1) = 4x^2 + 4x + 1$$

$$(4x^2 + 4x + 1) : (x + 0,5) = 4x + 2$$

$$(4x^3 - 3x - 1) = (x - 1)(x + 0,5)(4x + 2)$$

$$= \underline{(x - 1)(x + 0,5)(2x + 1)2} \quad x \neq 1, x \neq -0,5$$

Aufgabe 13.5

$$(10x^3 - 23x^2y - 12xy^2 + 36y^3) : (2x - 3y) = 5x^2 - 4xy - 12y^2$$

$$(5x^2 - 4xy - 12y^2) : (x - 2y) = 5x + 6y$$

$$(10x^3 - 23x^2y - 12xy^2 + 36y^3) = \underline{(2x - 3y)(x - 2y)(5x + 6y)} \quad x \neq 1,5y, x \neq 2y$$